التحليل العددي

المعادلة اللاخطية، الأنظمة الخطية، الاندراج، التفاضل والتكامل العددي

الدكتـــور
نشاط ابراهيم العبيدي



Numerical Analysis



مكتبة نرجس PDF
www.narjes-library.blogspot.com

الفهرس

الفصل الأول

مبادئ أولية

الفصل الثاني

مراجعة نظرية

الفصل الثالث

حل المعادلة اللاخطية

الفصل الرابع

حل منظومة المعادلات الخطية

الفصل الخامس

الاندراج والتقريب بمتعددات الحدود

الفصل السادس

التفاضل العددي

الفصل السابع

التكامل العددي

المقدمة

ان الهدف الأساسي في وضع هذا الكتاب هو توفير مرجع باللغة العربية بين أيدي طلبة الفروع العلمية والتطبيقية، وذلك لتخفيف معاناتهم في البحث عن مصدر عربي يلجأون إليه وقت الحاجة، وللاستزادة في المعلومات التي يتلقونها من أساتذتهم.

وقد حرصت على أن يكون أسلوب الكتاب فيه من الوضوح بقدر ما فيه من حث للطلبة على التحري واستنباط الصيغ الرياضية، لكثير من الطرق المذكورة، بأنفسهم.

كما إن الكتاب يلمح للطلبة بان هناك أساليب وطرق غير المذكورة فيه، فلا يظن أن هذه نهاية المطاف!.

لكن هذا لا يصون الكتاب من الأخطاء او السهو أو النقص!. فلا يبخل زميلي الأستاذ أو عزيزي الطالب عليّ في إبداء ملاحظاتهم والتنبيه عن الأخطاء الواردة فيه من أي مكان كان، خاصة بعد دخولنا زمن الاتصال السريع عن بعد.

ومن الله التوفيق

المؤلف

مبادئ أولية

الفصل الأول

مبادئ أولية

Basic Principles

مقدمة Introduction:

ان العمل على ايجاد حلول تقريبية يتطلب منا معرفة بعض الأمور الاساسية عن الاعداد وانظمتها وكيفية التعامل معها لكي نتفق على المسميات التي سنستخدمها. كما ولابد ان نتعرف على اسباب تسميتنا للحلول بانها تقريبية (اي غير مضبوطة). أي ان نكتشف الاسباب التي تؤدي إلى حدوث الاخطاء في الحلول.

وحيث اننا نتعامل مع ارقام، كثير من الارقام، فلابد لنا من ان نستخدم الجهاز الذي يساعدنا بذلك الا وهو الحاسب الالي. لكن ما المشاكل التي يمكن ان نواجهها عند استخدامنا لهذا الجهاز؟

1.1 انظمة الاعداد Number Systems:

في حياتنا اليومية نستخدم نظام الاعداد العشري المكون من عشرة ارقام هي (0،1،2،...،9). وان أي عدد مكتوب بواسطة هذا النظام سيكون على شكل 5034798 مثلا. ان موقع كل رقم من ارقام هذا العدد له قيمة الرقم مضروبا بـ10 مرفوعة إلى قوة تمثل موقع الرقم من العدد ففي المثال اعلاه يكون موقع الارقام مبينا كما يلي:

الارقام	8	9	7	4	3	0	5
مواقعها	0	1	2	3	4	5	6

ان العدد 10 الذي يمثل عدد الارقام في النظام العشري أعتبر قاعدة لتمثيل الاعداد في هذا النظام ومما سبق فان العدد 5034798 هو بالحقيقة

$$5\times10^6+0\times10^5+3\times10^4+4\times10^3+7\times10^2+9\times10^1+8\times10^0$$

من هذا التحليل يمكن الان ان تفكر بانظمة عددية اخرى لها قواعد مختلفة ويمكن تكوين انظمة ثنائية، ثلاثية، رباعية،... الخ. الا اننا لا نحتاج إلى هذه الانظمة الا في حالات خاصة ولبعض الانظمة فقط.

واهم حالة يمكن عرضها هنا هي النظام الثنائي، وهو النظام المستعمل في أجهزة الحاسب الآلي.

ان النظام الثنائي يعتمد على الاساس 2 ويتكون من رقمين فقط هما 0 و1. وقد اعتُمد هذا النظام لانه يمثل ترجمة تطبيقية لحجر الاساس في المنطق الرياضي وهي درجة صدق العبارة. ان العبارة في المنطق الرياضي لها احتمالين اما ان تكون صادقة أو كاذبة وهذا يمكن ترجمته على انه وجود شيء أو عدمه وحيث ان اجهزة الحاسب الالي تعمل بواسطة الكهرباء فان وجود تيار كهربائي او عدمه يمثل صدق أو كذب العبارة على الترتيب وهذان الاحتمالان تم ترميزهما رياضياً بالرمزين 0و 1. وعليه بني هذا النظام كي يستخدم في الحاسب الالي.

اما كيفية تمثيل الاعداد بهذا النظام فيتم بتطبيق نفس فكرة تمثيل الاعداد بالنظام العشري اذ ان أي عدد في هذا النظام سيحتوي على رمزين فقط هما 0 و1 وبهذا يكون شكل الاعداد كما يلي (مثلاً).

100 10 10 111 0

أو 111 001

أو 1111

أو 10001

وان قيمة كل رقم تمثل الرقم مضروباً في 2 (اساس النظام) مرفوعاً إلى قوة تمثل موقعه في العدد، فلنأخذ (مثلا) العدد 111001. ان موقع الارقام فيه هو:

الرقم 1 1 1 0 0 1

موقعه 0 1 2 3 4 5

∴ فان العدد 111001 هو بالحقيقة.

$$1\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 0\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0$$

وهذا يعطي قيمته ممثلة بالنظام العشري على انها.

$$32 + 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 57$$

على الرغم من اننا نستخدم النظام العشري في عملنا على الحاسب الالي (لسهولته واعتيادنا عليه) الا ان الجهاز يحوله مباشرة إلى النظام الثنائي. في الواقع ان الجهاز يقوم باجراء كل العمليات الحسابية بالنظام الثنائي وبعد الحصول على الناتج النهائي يقوم بتحويل العدد من النظام الثائي إلى العشري لاظهاره على الشاشة وبسبب هذه التحويلات فانه في بعض الاحيان يكون العدد منته بالنظام العشري بينما غير منته بالنظام الثنائي أو العكس وحيث ان جهاز الحاسب الآلي له سعة محدودة في خزن الاعداد فذلك يعني انه لابد من قطع العدد غير المنته إلى ما يسعه الحاسب الآلي.

مثلاً العدد $(0.2)_{10}$ لو اردنا ان نحوله إلى النظام الثنائي ينتج

$$(0.001100110011001100 11...)_2$$

ومن الانظمة الشائعة الاستخدام هي النظام الثماني والنظام الستعشري. فالنظام الثماني يتكون من الرموز

(0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7)

اما النظام الستعشري فرموزه هي:

(0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، A، B، C، D، E، F)

1.2 مصادر الأخطاء Sources of Error

لا تخلو الحلول العددية من الخطأ ويعود ذلك لأسباب كثيرة نسميها مصادر الخطأ منها.

أ. محدودية الخزن في الحاسب الالي Limitation of Computer Storage

بمجرد ادخال العدد إلى الجهاز الحاسب فاننا لا نضمن خزنه بقيمته الحقيقة، ذلك بسبب تحويله إلى النظام الثنائي الذي يحتاج إلى عدد كبير من الثنائيات للتعبير عن العدد المدخل مما يؤدي إلى اختزال هذا العدد الكبير بالتالي تغيير قيمة العدد، او ادخال قيم عددية غير منتهية مثل π ,e، $\sin(x)$ ... الخ.

فالعدد $\frac{1}{3} = 0.333...$ لا يمكن خزنه كاملاً مهما كانت سعة الجهاز في الخزن. اذن ستكون قيمته في الجهاز خاطئة.

ب. خطا الالة Machine Error

ان الكلام عن الجهاز الحاسب ينسحب على اجهزة القياس الأخرى، أجهزة القياس المستخدمة في المختبرات العلمية مثل الميزان والساعة والفولتميتر ومقياس الحرارة. كل هذه الاجهزة وغيرها قابلة للخطأ مهما بلغت من الدقة ذلك انها صناعة بشرية وان المواد المصنوعة منها هذه الاجهزة تتأثر بالظروف الجوية المحيطة مثل ضغط وحرارة ورطوبة...الخ.

ج. خطأ الصيغة الرياضية Formulation Error

في بعض الاحيان قد يتطلب وضع النموذج الرياضي لحاله علمية (فزيائية، بيولوجية، اقتصادية،...الخ) ان يتضمن عدد كبير من العوامل مما يؤدي إلى تعقيد الحالة وصعوبة تطبيق النموذج، ولا جل ان يكون النموذج قابلاً للتطبيق غالبا ما يصار إلى اهمال بعض العوامل ذات الاهمية الاقل في ذلك النموذج بحيث لا يؤثر هذا الاهمال على الشكل العام والفكرة العلمية للنموذج.

لكن في حقيقة الامر ان هذا النموذج، المعدل سوف لن يكون دقيقاً في وصف الحالة تحت الدرس. فمثلاً عند قياس سرعة جسم يتحرك على سطح الأرض فاننا نهمل مقاومة الهواء غالباً، كذلك فان قانون القوة لنيوتن.

$$F = am_o$$

حيث m_o هي كتلة الجسم وهو ساكن.

هو في حقيقته قانون اينشتاين.

$$F = am$$

حيث m هي كتلة الجسم وهو متحرك حيث أن:

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-(\frac{V}{C})^2}}$$

حيث V تمثل سرعة الجسم وC هي سرعة الضوء.

فبالرغم من ان قانون نيوتن ينطبق على الحياة اليومية على سطح الأرض إلا انه يقصر في تفسير الحالات الفلكية أو حركة مكونات الذرة. اذ أن اهمال الفرق بين كتلة الجسم ساكناً وكتلته متحركاً قد لا يؤثر في حالة مشاهداتنا اليومية الا انه بالتأكيد يعطي خطأً في الحساب ولو بسيط.

د. خطأ البتر Truncation Error

كثيراً ما نستخدم دوال ليس لها قيمة مضبوطة ذلك لانها تتمثل في سلسلة لا نهاية لها. وذلك ما يضطرنا إلى استخدام نقط عدد محدود من حدود السلسلة ومما يعني استخدام قيمة خاطئة للدالة المعنية. اما ما تبقى من السلسلة فيعتبر مقدار الخطأ في قيمة الدالة، وفي كثير من الأحيان لا يمكن حساب هذا المتبقي وعملياً فان الحد الاول من المتبقي يؤخذ كقياس تقريبي للخطأ.

فمثلاً الدالة cos x نجد قيمتها عند نقطة x من خلال السلسلة.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

فعند النقطة x = 1 تصبح

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} - \ldots$$

ان تحديد عدد الحدود المستخدمة يعتمد على دقة القيمة المطلوبة للدالة، فإذا كان مطلوب ايجاد قيمة (1) cos صحيحة لأربع مراتب عشرية فإننا نستخرج قيم حدود السلسلة حداً حداً ونضيفها لبعض مع ملاحظة تطابق المراتب العشرية بعد اضافة كل حد. فللحدود الثلاث الاولى نجد أن:

$$\cos(1)=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}=0.541666666$$

وبعد إضافة الحد الرابع

$$\cos(1)=0.541666666-\frac{1}{6!}=0.540277777$$

واضح ان التطابق لمرتبتين عشريتين فقط فنحتاج لاضافة حدود اخرى

$$\cos(1)=0.540277777+\frac{1}{8!}=0.540302579$$

لنقارن

$$\begin{array}{r} 0.540302579 \\ -\;0.540277777 \\ \hline 0.000024802 \end{array}$$

لقد حصلنا على ما نريد اذاً. يعني يمكننا القول ان

$$\cos(1) = 0.5402$$

هي قيمة صحيحة للدالة ولا نضمن دقة ما يأتي بعد الرقم 2 فهي صحيحة فقط لاربعة مراتب عشرية. اما مقدار الخطأ فيحسب على انه قيمة أول حد غير مستخدم في السلسلة (لانه اكبر حد في المتبقي) وفي حالتنا هذه فهو.

$$e=\frac{1}{10!}=2.76\times10^{-7}=0.00000276$$

وهذا في ما يعنيه ان القيمة التي حصلنا عليها بعد اضافة الحد الرابع لم تكن صحيحة لاربع مراتب عشرية فقط وانما هي صحيحة لست مراتب!.

٥. خطأ التقريب (التدوير او القطع)

Approximating Error (Rounding or Chopping)

في حياتنا اليومية غالباً ما نستخدم اقل الارقام للتعبير عن الكميات التي نتحدث عنها فأذا سؤلنا عن الوقت وكان 5:14 فاننا سنجيب انه 5:15 (خمسة وربع)

واذا سؤلنا عن الوقت اللازم للوصول من مدينة أ إلى مدينة ب وكان 3:50 ثلاث ساعات وخمسون دقيقة فاننا نجيب انه اربع ساعات.

ان عملية التقريب في الحاسوب تتم عندما يكون عدد الثنائيات الممثلة للعدد اكبر من طول وحدة الخزن في الجهاز (word length) عندئذ سيقوم الجهاز باحدى العمليتين:

1. القطع Chopping

لنفرض ان طول وحدة الخزن في الجهاز هي اربع مراتب وقد أدخلنا الاعداد a = 0.24196 ، b = 0.30721 ، c = 0.003257 فان الجهاز سيخزنها بالصور.

$a^* = 0.2419$
$b^* = 0.3072$
$c^* = 0.0032$

أي ان الجهاز قد اهمل كل المراتب بعد الرابعة.

2. التدوير Rounding

نقوم في هذه الحالة باختبار قيمة المرتبة بعد الرابعة فاذا كانت اكبر من او تساوي نصف الوحدة ≥0.5 فيضاف 1 إلى المرتبة الرابعة ويلغى ما بعد ذلك والا فانه يهمل ما بعد المرتبة الرابعة. اما في الجهاز أي عملياً فانه يضيف إلى العدد المخزون 0.00005 ثم يهمل ما بعد المرتبه الرابعة من حاصل الجمع فالأعداد a، b، c من المثال أعلاه تصبح.

$$a^* = a + 0.00005 = \begin{array}{r} 0.24196 \\ +0.00005 \\ \hline 0.2420\boxed{1} \end{array}$$

$$b^* = b + 0.00005 = \begin{array}{r} 0.30721 \\ +0.00005 \\ \hline 0.3072\boxed{6} \end{array}$$

$$c^* = c + 0.00005 = \begin{array}{r} 0.003257 \\ +0.00005 \\ \hline 0.003\boxed{307} \end{array}$$

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} = 0.541666666$$

وبعد إضافة الحد الرابع

$$\cos(1) = 0.541666666 - \frac{1}{6!} = 0.540277777$$

واضح ان التطابق لمرتبتين عشريتين فقط فنحتاج لاضافة حدود اخرى

$$\cos(1) = 0.540277777 + \frac{1}{8!} = 0.540302579$$

لنقارن

$$\begin{array}{r} 0.540302579 \\ -\ 0.540277777 \\ \hline 0.000024802 \end{array}$$

لقد حصلنا على ما نريد اذاً. يعني يمكننا القول أن

$$\cos(1) = 0.5402$$

هي قيمة صحيحة للدالة ولا نضمن دقة ما يأتي بعد الرقم 2 فهي صحيحة فقط لاربعة مراتب عشرية. اما مقدار الخطأ فيحسب على انه قيمة أول حد غير مستخدم في السلسلة (لانه اكبر حد في المتبقي) وفي حالتنا هذه فهو.

$$e = \frac{1}{10!} = 2.76 \times 10^{-7} = 0.000000276$$

وهذا في ما يعنيه ان القيمة التي حصلنا عليها بعد اضافة الحد الرابع لم تكن صحيحة لاربع مراتب عشرية فقط وانما هي صحيحة لست مراتب.

ه. خطأ التقريب (التدوير او القطع)

Approximating Error (Rounding or Chopping)

في حياتنا اليومية غالباً ما نستخدم اقل الارقام للتعبير عن الكميات التي نتحدث عنها فاذا سؤلنا عن الوقت وكان 5:14 فاننا سنجيب انه 5:15 (خمسة وربع)

واذا سؤلنا عن الوقت اللازم للوصول من مدينة أ إلى مدينة ب وكان 3:50 ثلاث ساعات وخمسون دقيقة فاننا نجيب انه اربع ساعات.

ان عملية التقريب في الحاسوب تتم عندما يكون عدد الثنائيات الممثلة للعدد اكبر من طول وحدة الخزن في الجهاز (word length) عندئذ سيقوم الجهاز باحدى العمليتين:

1. القطع Chopping

لنفرض ان طول وحدة الخزن في الجهاز هي اربع مراتب وقد أدخلنا الاعداد a = 0.24196 ، b = 0.30721 ، c = 0.003257 فان الجهاز سيخزنها بالصور.

$a^* = 0.2419$
$b^* = 0.3072$
$c^* = 0.0032$

أي ان الجهاز قد اهمل كل المراتب بعد الرابعة.

2. التدوير Rounding

نقوم في هذه الحالة باختبار قيمة المرتبة بعد الرابعة فاذا كانت اكبر من او تساوي نصف الوحدة ≤0.5 فيضاف 1 إلى المرتبة الرابعة ويلغى ما بعد ذلك والا فانه يهمل ما بعد المرتبة الرابعة. اما في الجهاز أي عملياً فانه يضيف إلى العدد المخزون 0.00005 ثم يهمل ما بعد المرتبه الرابعة من حاصل الجمع فالأعداد a، b، c من المثال أعلاه تصبح.

$$a^* = a + 0.00005 = \begin{array}{r} 0.24196 \\ \underline{+0.00005} \\ 0.2420\boxed{1} \end{array}$$

$$b^* = b + 0.00005 = \begin{array}{r} 0.30721 \\ \underline{+0.00005} \\ 0.3072\boxed{6} \end{array}$$

$$c^* = c + 0.00005 = \begin{array}{r} 0.003257 \\ \underline{+0.00005} \\ 0.0033\boxed{07} \end{array}$$

لابد انك ادركت ان عملية التدوير بصورة عامة هي ادق من عملية القطع لكن لا تنسى انا باستخدام التدوير نقوم باجراء عملية جمع مع كل عدد يراد تقريبه أي انها مكلفة اكثر من القطع. وهذه سنة الحياة لا ربح بدون خسارة.

لو تساءلت عن الاعداد الصحيحة وكيف نعالجها نقول ليكن $x = 397216$ ويراد تقريب هذا العدد أي التعبير عنه بعدد اقل من المراتب وليكن خمس مراتب فسوف نقوم بعمل مماثل لما سبق وسنأتي بتفاصيل اكثر لاحقاً.

و. الخطأ المتراكم (المتضخم) Accumulated Error (Propagated Error)

يقصد به الخطأ الذي يحصل في خطوات لاحقة من العملية بناءاً على الخطأ الحاصل في خطوات سابقة. فأذا تضخم الخطأ اكثر فاكثر مع استمرار العملية فانه بالنهاية سوف يجتاح الحل وتطغى كمية الخطأ على قيمة الحل، عندها يقال ان الصيغة المستخدمة للحل بانها غير متقاربة (أو غير مستقرة) ذلك انه في الصيغ المستقرة فان الخطأ يتناقص باستمرار العملية. يحصل ذلك غالبا في الصيغ التكرارية، فالخطأ الحاصل في التكرار الحالي يسمى بالخطأ المحلي (Local Error) أما الخطأ الحاصل بعد n من التكرارات فيسمى بالخطأ الكلي (Global Error). وهذا المثال يوضح ذلك.

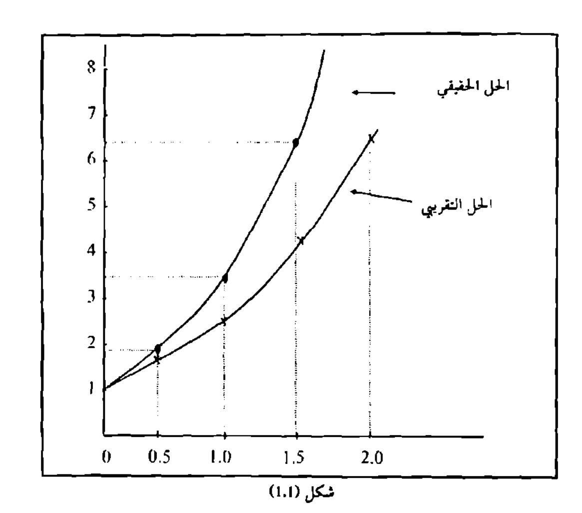
مثال 1:

لحل مسألة القيمة الابتدائية $y(0)=1$ و $y' = y + x$

على الفترة $0 \le x_n \le 2$

فاننا نستخدم طريقة اويلر التقريبية ذلك بان نقسم الفترة [2و0] إلى فترات جزئية ليكن طول كل منها $h = 0.5$ (شكل 1.1)

نعين النقاط x_n حيث $x_n = x_0 + nh$



شكل (1.1)

ونطبق صيغة اويلر حيث:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

فبدءاً من $n = 0$ ،$x_0 = 0$ ،$y_0 = 1$ فان

$$y_1 = y_0 + h(f(x_0, y_0))$$

$$= 1 + (0.5)(1 + 0) = 1.5$$

$$y_2 = 1.5 + (0.5)(1.5 + 0.5) = 2.5$$

$$y_3 = 2.5 + (0.5)(2.5 + 1) = 4.25$$

$$y_4 = 4.25 + (0.5)(4.25 + 1.5) = 7.125$$

لاحظ في الجدول (1)، ان مقدار الخطأ يتزايد كون ان صيغة اويلر هي تقريبية. فعند ادخال النقطة الاولى على الصيغة فانها تولد قيمة تقريبية وهذه القيمة تدخل لايجاد القيمة التالية فتتجمع اخطاء الصيغة واخطاء القيم المدخلة وهذا يتكرر للقيمة التالية وهكذا نلاحظ تضخم الخطأ علماً ان الحل الحقيقي للمسألة هو:

$$y = 2e^{x} - x - 1$$

جدول (1)

n	x_n	التقريبية y_n	المضبوطة y_n	الخطأ e_n
0	0	1	1	0
1	0.5	1.5	1.797	0.297
2	1.0	2.5	3.437	0.937
3	1.5	4.25	6.463	2.213
4	2	6.125	11.778	5.653

والصورة جلية في الشكل (1.1)

تعريف 1:

الخطأ المطلق هو الفرق بين القيمة الحقيقة والقيمة التقريبية للعدد ويرمز له e، أي ان

$$e_x = |x - x^*|$$

حيث x هي القيمة الحقيقية.

و x^* هي القيمة التقريبية.

تعريف 2:

الخطأ النسبي هو حاصل قسمة الخطأ المطلق على القيمة الحقيقية. وهو يبين نسبة الخطأ الموجود في القيمة التقريبية إلى القيمة الحقيقية ويرمز له δ أي ان:

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

وفي كثير من الاحيان يقاس الخطأ النسبي مئوياً ويسمى الخطأ النسبي المئوي.

$$\delta_{\%} = \frac{e_x}{x} \times 100$$

في حالة عدم توفر معلومات عن القيمة الحقيقية فيستعاض عنها بالقيمة التقريبية أي ان:

$$\delta_x = \frac{e_x}{x^*}$$

ان الخطأ النسبي يعطي صورة اوضح عن كمية الخطأ الموجودة فمثلاً لتكن.

$x = 0.0008 \quad , \quad x^* = 0.0007$

فان $e_x = 0.0001$

ويبدو صغيراً.

ولكن

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} = \frac{0.0001}{0.0008} = 0.125$$

أو

$$\delta_{\%} = 0.125 \times 100 = 12.5\%$$

وهي نسبة ليست قليلة.

إن التعامل مع قيم تقريبية يؤدي إلى ظهور أخطاء في نواتج العمليات الحسابية الأربع وفي بعض الأحيان يمكن التقليل من تلك الأخطاء بإعادة ترتيب العمليات الحسابية وإعادة صياغة التركيب للحدود الجبرية ولذلك لابد لنا من معرفة صيغة الخطأ المطلق والخطأ النسبي في كل عملية حسابية.

أ. الجمع: في جمع القيم التقريبية x^*, y^* ينتج الخطأ المطلق.

$$e_{x+y} = (x+y) - (x^* + y^*)$$

$$= (x - x^*) + (y - y^*)$$

$$\therefore \quad e_{x+y} = e_x + e_y \qquad (1)$$

اما الخطأ النسبي فهو:

$$\delta_{x+y} = \frac{e_x + e_y}{x + y}$$

وحيث ان

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

فان:

$$e_x = x\,\delta_x$$

$$\therefore \qquad \delta_{x+y} = \frac{1}{x+y}\left[x\,\delta_x + y\,\delta_y\right] \qquad (2)$$

ب.الطرح: بنفس اسلوب الجمع فان:

$$e_{x-y} = (x-y)-(x^*-y^*)$$
$$= (x-x^*)-(y-y^*)$$

إذن

$$e_{x-y} = e_x - e_y \qquad (3)$$

إن:

$$\delta_{x-y} = \frac{e_x - e_y}{x-y}$$

إذن

$$\delta_{x-y} = \frac{x\,\delta_x - y\,\delta_y}{x-y} \qquad (4)$$

ج. الضرب: عند ضرب العددين التقريبين x* , y* ينتج الخطأ.

$$e_{xy} = (xy)-(x^*\,y^*)$$

وحيث ان

$$e = x - x^*$$

$$x^* = x - e_x$$
$$e_{xy} = xy - \left[(x - e_x)(y - e_y)\right]$$
$$= xy - \left[xy - xe_y - ye_x + e_x e_y\right]$$

وحيث انه من المتوقع ان يكون الخطأ e_x و e_y صغيرا فان $e_x e_y$ يصبح صغير جداً يمكن اهماله وبذلك فإن:

$$e_{xy} \simeq xe_y + ye_x \qquad (5)$$

اما الخطأ النسبي فهو

$$\delta_{xy} = \frac{xe_y + ye_x}{xy}$$
$$= \frac{e_y}{y} + \frac{e_x}{x}$$

إذن

$$\delta_{xy} \simeq \delta_y + \delta_x \qquad (6)$$

د. القسمة: في حالة قسمة *x و *y نجد أن:

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{x - e_x}{y - e_y} = \frac{x - e_x}{y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e_y}{y}}$$

وحيث ان:

$$\frac{1}{1 - \frac{e_y}{y}} = 1 + \frac{e_y}{y} + \frac{e_y^2}{y^2} + \frac{e_y^3}{y^3} + \cdots$$

ينتج ان:

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{x - e_x}{y}\left[1 + \frac{e_y}{y} + \frac{e_y^2}{y^2} + \cdots\right]$$
$$= \frac{x - e_x}{y} + \frac{xe_y - e_x e_y}{y^2} + e^2 y \frac{x - e_x}{y^3} + \cdots$$

وباهمال الحدود التي تحتوي حاصل ضرب خطأين أو اكثر ينتج.

$$\frac{x^*}{y^*} \approx \frac{x}{y} - \frac{e_x}{y} + x\frac{e_y}{y^2}$$

$$e_{x/y} = \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*} = \frac{x}{y}\left(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}\right)$$

اما الخطأ النسبي فهو

$$\delta_{x/y} = \delta_x - \delta_y$$

مثال 2:

لنأخذ العددين المدورين $x^* = 4.28$ و $y^* = 3.1$. ان حاصل ضربهما هو x^*، $y^* = 13.268$ ، نجد الخطأ المطلق لكل من x^* وy^* وهو

$$e_x = 0.005$$

$$e_y = 0.05$$

ولذا يكون الخطأ في حاصل الضرب:

$$e_{xy} = x^* e_y + y^* e_x = (4.28)(0.05) + (3.1)(0.005)$$

$$= 0.2295$$

والخطأ النسبي يكون:

$$\delta_x = \frac{0.2295}{13.268} = 0.018$$

من الخطأ المطلق يتضح ان حاصل الضرب صحيح فقط للاعداد الصحيحة اما الكسر فانه غير مضمون الدقة.

مثال 3:

في حل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + cx = 0$ نستخدم الدستور.

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

فلنأخذ المعادلة $x^2 + 62.10x + 1 = 0$

والتي لها الجذرين $x_1 = 0.0161072$ و $x_2 = 62.08390$ تقريباً.

فباستخدام اربعة ارقام معنوية في حساباتنا لحصل على ما يلي:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{(62.10)^2 - 4} = \sqrt{3856. - 4.000}$$
$$= \sqrt{3852.} = \sqrt{62.06}$$

وعليه تكون.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-62.10 + 62.06}{2.000} = \frac{-0.04000}{2.000} = -0.02000$$

وهو تقريب ضعيف للجذر $x_1 = -0.016107$ (وذلك بسبب طرح عددين متقاربين) اما الجذر x_2 فهو حاصل جمع ويكون

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-62.10 - 62.06}{2.000} = \frac{-124.2}{2.000} = -62.10$$

مقارنة مع الجذر $x_2 = 62.08$

الا انه يمكن التوصل إلى دقة اعلى من ذلك رغم استخدامنا نفس العدد من الارقام المعنوية ذلك بتغيير شكل الصيغة وكما يلي:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \left(\frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}$$

$$= \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2.000}{62.10 + 62.06} = \frac{-2.000}{124.2} = -0.01610$$

الفرق واضح! لكن لاحظ ماذا يحدث لايجاد الجذر الاخر x_2

$$x_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{-2.000}{62.10 - 62.06} = \frac{2.000}{0.04000} = 50.00$$

خطأ كبير سببه ليس فقط طرح عددين متقاربين بل أيضاً القسمة على ناتج الطرح ذلك وهو صغير نسبياً.

3. 1 الحسابات باجهزة الحاسب الآلي:

من المعروف ان جهاز الحاسب تكون قابليته على خزن الاعداد محدودة ذلك بمحدودية طول وحدة الخزن (طول الكلمة) (Ward length) وحيث ان الاعداد التي تدخل إلى الجهاز بصيغة النظام العشري [9،...، 2، 1، 0] تتحول إلى صيغة النظام الثنائي (Binary) [1، 0] فان مكونات العدد سيختلف عددها ويؤول للزيادة حتماً فمثلاً:

عشري	ثنائي
2	01
10	0101
21	10101

لذا فعندما يكون العدد بصيغة النظام الثنائي بحجم أكبر من قابلية الجهاز على الاستيعاب فان الجهاز يضطر إلى تقريب ذلك العدد بإلغاء المراتب الفائضة عن المكن وعليه فان قيمة العدد قد تغيرت بمقدار ما قد تم إلغائه. وهذه الحالة ليست قليلة لحدوث بل على العكس فان الإعداد الصغيرة والكبيرة وخاصة الكسور تعاني من هذه المشكلة. لذا فان استخدام الجهاز ضمنياً يعني الوقوع في خطأ يصعب تفاديه.

وقد مر علينا سابقاً في مصادر الأخطاء مصطلح الرقم المعنوي (او المميز) (Significant digit)! قد لا يكون هناك تعريف محدد واضح للرقم المعنوي لكن يمكن أن نقول أن الرقم المعنوي هو الذي تكون له قيمة عددية معتبرة فمثلاً لو أردنا كتابة كل من الأعداد الآتية باستخدام أربعة أرقام معنوية فقط [397285، 0.0397285، 397.285] فإنها تصبح بالشكل [397300، 0.03973، 397.3] على الترتيب وذلك بعد تدويرها.

اذاً بغض النظر عن موقع الرقم كونه صحيحاً أو ضمن الكسر، وجوده يعتمد على عدد الارقام المعنوية المطلوب استخدامها.

امثلة لتقريب الاعداد باستخدام اربعة ارقام معنوية فقط.

$1.0006 \Rightarrow 1.001$

$100.06 \Rightarrow 100.1$

$0.010006 \Rightarrow 0.01001$

اما بردن وفيرز (Burden, R.L. and J.D. Faires) [7] فقد وضعا التعريف الأتي:

تعريف 3:

يقال أن *P يقرب العدد P إلى t من الارقام المعنوية اذا كان t هو أكبر عدد صحيح غير سالب بحيث:

$$\frac{|P-P^*|}{|P|} < 5*10^{-t}$$

فهذا التعريف يعتمد الخطأ النسبي للحصول على انسيابية في المفهوم.

ان الاعداد تختزن في الجهاز على شكل موحد وهو ما يسمى صيغة الفاصلة السائبة (العائمة) القياسية.(Normalized Floating Point)

حيث أي عدد يتحول إلى الصيغة الآتية:d

$$0.d_1 d_2 ... d_n \times 10^E \quad , \quad d_1 \neq 0$$

حيث $d_i|_{i=1}^{n}$ هي مكونات العدد و E هو الاس الذي يحافظ على القيمة العددية للعدد الاصلي وطبعاً لابد ان يكون هناك حجرة خاصة لتدل على اشارة الجزء الكسري، وحجرة خاصة لتدل على اشارة الاس. ويعتمد عدد المراتب العشرية في الجزء الكسري على قابلية الجهاز على الاستيعاب (طول الكلمة؛ والتي هي وحدة الخزن الخاصة بكل جهاز).

مثلاً لكتابة الاعداد ادناه بصيغة الفاصلة العائمة.

$397285 \Rightarrow 0.397285 \times 10^6$

$397.285 \Rightarrow 0.397285 \times 10^3$

$0.00397285 \Rightarrow 0.397285 \times 10^{-2}$

$0.397285 \Rightarrow 0.397285 \times 10^0$

اما في اجراء العمليات الحسابية على الاعداد في صيغة الفاصلة العائمة فانه يعتمد على نوع العملية الحسابية. ادناه نستعرض العمليات الحسابية على اعداد فيها الجزء الكسري مكون من ثلاث مراتب على ان نقرب الناتج إلى ثلاث مراتب.

1. الجمع: نوحد الاسس إلى الاس الاكبر بينهما ونجري عملية الجمع على الكسور.

مثال:

$$0.381\times10^{1}+0.502\times10^{2}$$

تصبح

$$\begin{array}{l} 0.0381\times10^{2} \\ \underline{+0.502\times10^{2}} \\ =0.5401\times10^{2} \xrightarrow{\text{بالقطع}} 0.540\times10^{2} \end{array}$$

او

$$\begin{array}{l} 0.5401\times10^{2} \\ \underline{+0.0005\times10^{2}} \\ 0.5406\times10^{2} \xrightarrow{\text{بالتدوير}} 0.540\times10^{2} \end{array}$$

2. الطرح: كما في عملية الجمع

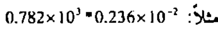
مثلاً: $0.872\times10^{1}-0.227\times10^{-1}$

$$\begin{array}{l} 0.872\times10^{1} \\ \underline{-0.00227\times10^{1}} \\ =0.86973\times10^{1} \xrightarrow{\text{بالقطع}} 0.869\times10^{1} \end{array}$$

او

$$\begin{array}{l} \underline{+0.0005\times10^{1}} \\ =0.87023\times10^{1} \xrightarrow{\text{بالتدوير}} 0.870\times10^{1} \end{array}$$

الضرب: هنا نقوم بجمع الاسس وضرب الكسور ببعضها ويعدل الناتج إلى حالة الفاصلة العائمة القياسية.

مثلاً:  $0.782\times10^{3} * 0.236\times10^{-2}$

تصبح

$$\begin{array}{r} 3 \\ \underline{+\,-2} \\ 1 \end{array}$$

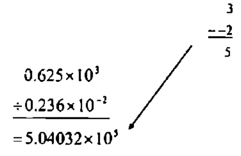
$$\begin{array}{l} \quad 0.782\times10^{3} \\ \underline{*0.236\times10^{-2}} \\ =0.184552\times10^{1} \xrightarrow{\text{بالقطع}} 0.184\times10^{1} \\ \underline{+0.0005\times10^{1}} \qquad\qquad\qquad \text{أو} \\ =0.185052\times10^{1} \xrightarrow{\text{بالتدوير}} 0.185\times10^{1} \end{array}$$

4. القسمة: بعكس عملية الضرب فاننا نطرح الاسس وذلك بحسب ترتيب المسألة ونقسم الكسور.

ونعدل الناتج إلى صيغة الفاصلة العائمة.

مثلاً $0.625\times10^{3} \div 0.236\times10^{-2}$

تصبح :



$$\begin{array}{r} 3 \\ \underline{-\,-2} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 0.625\times10^{3} \\ \underline{\div 0.236\times10^{-2}} \\ =5.04032\times10^{5} \end{array}$$

يعدل لصيغة الفاصلة العائمة فيكون.

$$\begin{array}{l} =0.504032\times10^{6} \xrightarrow{\text{بالقطع}} 0.504\times10^{6} \\ \underline{+0.0005\times10^{6}} \qquad\qquad\qquad \text{أو} \\ =0.504532\times10^{6} \xrightarrow{\text{بالتدوير}} 0.504\times10^{6} \end{array}$$

اخيراً من المفيد ان نذكر طريقة الضرب العُشّي (المتداخل) (nested mlutiplication) والتي تستخدم في ايجاد قيمة متعددة الحدود وبعدد اقل من العمليات الحسابية مما يؤدي إلى الحد من اخطاء التدوير المصاحبة للعمليات الحسابية.

مثال 4:

لو اردنا حساب قيمة الحدودية P(x) عند النقطة x = 2.5 مستخدمين اربعة ارقام معنوية حيث:

$$P(x) = x^5 - 8.6x^4 + 38.782x^3 - 17.25x^2 - 4.5927x + 10.5$$

نحصل على

$$P(2.5) = 474.7$$

علماً اننا اجرينا خمس عمليات طرح أو جمع وثمانية عشر عملية ضرب.

ولو استخدمنا الضرب المتداخل

$$P(x) = ((((x - 8.6)x + 38.782)x - 17.25)x - 4.5927)x + 10.5$$

فاننا نحصل على

$$P(2.5) = 474.5$$

بعد اجراء خمس عمليات جمع أو طرح واربع عمليات ضرب فقط، علماً ان القيمة الحقيقية للحدودية هي:

$$P(2.5) = 474.51825$$

تمارين

في التمارين 1-3 استخدم نظام الفاصلة العائمة.

1. جد الخطأ المطلق لكل نتيجة بواسطة القطع والتدوير لثلاثة ارقام.

أ. $3.26\times10^{-3}+2.07\times10^{4}$

ب. $1.92\times10^{5}-1.94\times10^{4}$

ج. $(3.26\times10^{-3}+2.07\times10^{4})-2.01\times10^{-4}$

د. $3.26\times10^{-3}+(2.07\times10^{4}-2.01\times10^{-4})$

2. جد الخطأ النسبي لكل نتيجة بواسطة القطع والتدوير لثلاثة ارقام.

أ. $3.28\times10^{-2} * 6.98\times10^{3}$

ب. $3.28\times10^{-8} * 6.98\times10^{-7}$

ج. $(3.28\times10^{-2} * 6.98\times10^{3}) \div 4.82\times10^{-8}$

د. $3.28\times10^{-2} * \left(6.98\times10^{3} \div 4.82\times10^{-8}\right)$

3. جد الخطأ المطلق والنسبي بعد القطع لثلاثة ارقام.

أ. $4.82\times10^{2} \div 8.81\times10^{8}$

ب. $1.06\times10^{-9} \div 4.06\times10^{2}$

ج. $4.82\times10^{2} \div (8.81\times10^{8} * 4.06\times10^{-2})$

د. $\left(4.82\times10^{2} \div 8.81\times10^{8}\right) * 4.06\times10^{-2}$

4. اكتب برنامجاً لتوضيح تأثير عملية الجمع في الفروع أ، ب، جـ

أ. اجمع العدد 0.01 مائة مرة.

ب. اجمع العدد 0.001 الف مرة.

ج. اجمع العدد 0.001 عشرة الاف مرة.

د. اطبع النتائج الوسطية للقيم 0.1 و 0.2 إلى 1.0.

مراجعة نظرية
Theoretical Background

2.1 نظرية رول

2.2 نظرية رول العامة

2.3 نظرية متوسط القيمة

2.4 نظرية متوسط القيمة للتكامل

2.5 نظرية القيم القصوى

2.6 نظرية القيمة الوسيطة (البينية)

2.7 نظرية تيلر

2.8 نظرية كوشي

تمارين

الفصل الثاني

مراجعة نظرية

Theoretical Background

تعريف 1:

لتكن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ متابعة من الاعداد الحقيقية، يقال ان المتابعة تتقارب (converges) إلى عدد x ويسمى النهاية (Limit) اذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد صحيح موجب N بحيث لكل $n>N$ يكون $|x_n - x|<\varepsilon$ أي ان.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \tag{1}$$

تعريف 2:

لتكن f دالة معرفه على مجموعة من الاعداد الحقيقة X وان $x_0 \in X$، يقال أن f متصلة (continuous) عند x_0 اذا كان

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{2}$$

واذا كانت f متصلة عند كل نقطة من نقاط X عندئذ يقال ان f متصلة على X.

تعريف 3:

لتكن f دالة معرفة على فترة تحتوي x_0. يقال ان f قابلة للاشتقاق عند x_0 اذا كانت النهاية.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{3}$$

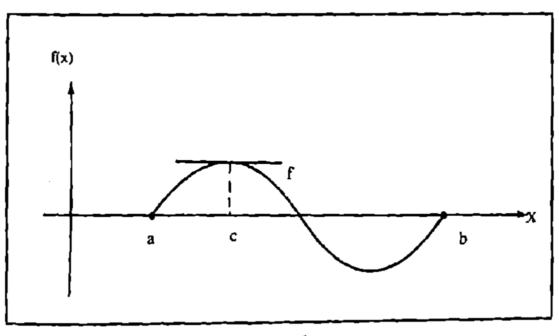
موجودة، عندئذ يقال ان هذه هي مشتقة الدالة f ويرمز لها f' او $\frac{df}{dx}$.

ترميز 1): يرمز لمجموعة الدوال المتصلة على المجموعة X بالرمز $C(X)$، فاذا كانت X هي فترة على خط الاعداد الحقيقية فاننا نستخدم الاقواس المناسبة لتلك الفترة. فلو كانت X هي الفترة المغلقة $[a,b]$ عندئذ نرمز لمجموعة الدوال المتصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ بالرمز $C[a,b]$

2) يرمز لمجموعة الدوال التي لها n من المشتقات المتصلة في الفترة $[a,b]$ بالرمز $C^n[a,b]$

2.1 نظرية رول (Rolle's Theorem):

لتكن $f \in C[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في (a,b) إذا كانت $f(a) = f(b)$ فانه توجد نقطة c بين a و b بحيث أن $f'(c) = 0$ شكل (1 .2)



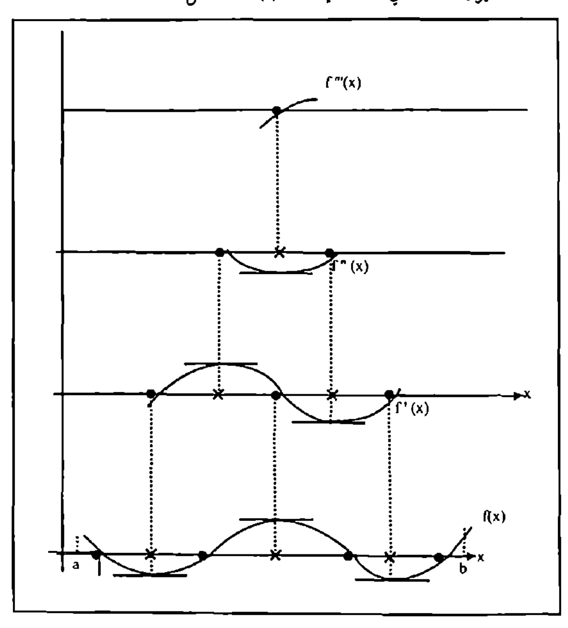
شكل (2.1)

2.2 نظرية رول العامة (General Rolle's theorem):

لتكن $f \in C^n[a,b]$ اذا كانت النقاط $x_i|_{i=0}^{n}$ في الفترة [a,b] بحيث

$$f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$$

فانه يوجد عدد c في (a,b) بحيث $f^{(n)}(c) = 0$. شكل (2.2)



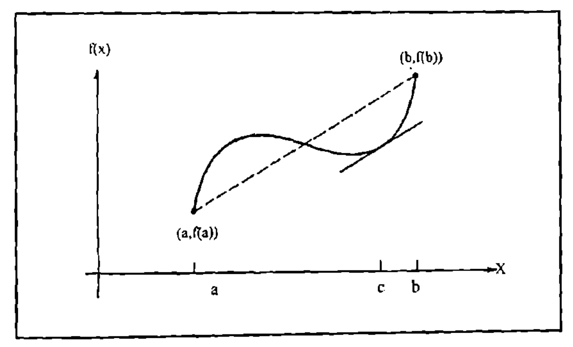
شكل (2.2)

2.3 نظرية متوسط القيمة M.V.T (Mean Value Theorem):

لتكن f دالة معرفة على الفترة [a,b] ومتصلة على [a,b] وقابلة للاشتقاق في (a,b) فانه يوجد عدد c بين b,a بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{4}$$

كما في شكل (2.3)

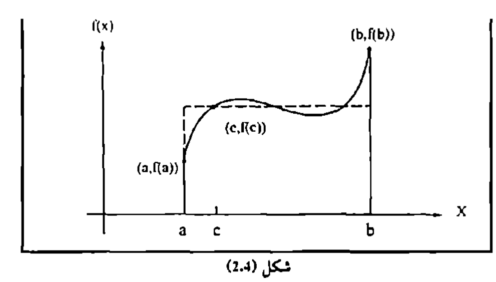


شكل (2.3)

2.4 نظرية متوسط القيمة للتكامل M.V.T. for Integral:

اذا كانت $f \in C[a,b]$ و g قابلة للتكامل على [a,b] ولا تغير اشارتها خلال الفترة [a,b] فانه يوجد عدد c بين b,a بحيث.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx \tag{5}$$

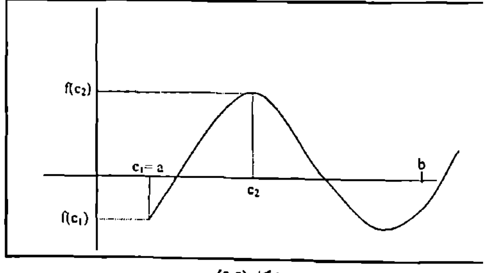


شكل (2.4)

وفي حالة كون $g(x) = 1$ فإننا نحصل على متوسط القيمة للدالة f على الفترة

ظرية القيم القصوى Extreme Value Theorem

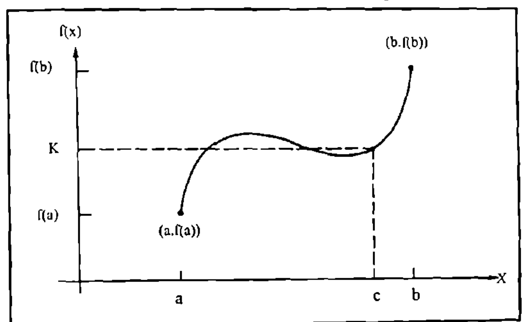
إذا كانت $f \in C[a,b]$ فانه يوجد عددين c_1، c_2 في [a,b] بحيث ان $f(c_1) \le f(x) \le$ لكل $x \in [a,b]$. اضافة لذلك، اذا كانت f قابلة للاشتقاق في فان العددين يكونان اما نهايتي الفترة [a,b] أو حيث $f'(x)$ تساوي صفراً.
(2.5)



شكل (2.5)

2.6 نظرية القيمة الوسيطة (البينية) Intermediate Value Theorem:

إذا كانت $f \in C[a,b]$ وان k هو عدد يقع بين $f(a)$ و $f(b)$ فانه يوجد عدد c بين b,a بحيث $f(c) = k$ شكل (2 .6)



شكل (2 .6)

2.7 نظرية تيلر Taylor's Theorem

لتكن $f \in C^n[a,b]$ وان $f^{(n+1)}$ موجود على $[a,b]$ ولتكن x_0 نقطة في $[a,b]$، لكل $x \in [a,b]$ يوجد $\xi(x)$ بين x_0 و x بحيث ان:

$$f(x) = P_n(x) + R(x)$$

حيث:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0)$$

$$+ \cdots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0) \qquad (6)$$

و

$$R(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi_{(x)}) \qquad (7)$$

ان المعادلة (6) تسمى سلسلة تيلر (Taylor Series) وعندما $x_0=0$ فاننا نحصل على سلسلة مكلاورن (Maclaurin series) اما R(x) في المعادلة (7) فيسمى المتبقي (Remainder)

2.8 نظرية كوشي Cauchy's Theorom:

لتكن {xn} متابعة من الاعداد الحقيقية. اذا كان لكل $\varepsilon>0$ يوجد عدد صحيح N بحيث ان $|x_n-x_m|<\varepsilon$ لاي عددين m و n حيث $m,n>N$ عندئذ يقال ان المتابعة متقاربة.

تمارين

1. ما مقدار الخطأ المطلق والخطأ النسبي في تقريب P بـ $\tilde{P}$ في ما يلي؟

أ. $P = \pi$, $\tilde{P} = 3.1$

ب. $P = \frac{1}{3}$, $\tilde{P} = 0.333$

ج. $P = \frac{1}{6}$, $\tilde{P} = 0.16$

2. اجرالحسابات الآتية واستخرج الناتج

أ. بالضبط.

ب. باستخدام ثلاثة ارقام معنوية بطريقة القطع.

ج. باستخدام ثلاثة ارقام معنوية بطريقة التدوير.

ثم عين الارقام المعنوية المفقودة.

I. $0.0762 + 23.3$ II. 275×0.0327 III. $(183+0.752) - (161+22.0)$

3. بين ان المعادلة $x^3 = e^x \operatorname{Sin}(x)$ لها على الاقل جذر واحد في الفترة [1,4]؟

4. ارسم الدالة $f(x)=x^3 + 2x + k$، حيث k ثابت. كيف يمكن ان نستخدم نظرية رول ونظرية القيمة الوسيطة لاثبات انها تقطع المحور X مرة واحدة فقط؟

5. اوجد قيمة تقريبية للدالة e^x باستخدام سلسلة تيلر حول النقطة $x_0 = 0$ ذلك عند $x = 0.1$ وبمحدودية من الدرجة الرابعة. ما هي حدود الخطأ في القيمة التي حصلت عليها.

6. اوجد جذر المعادلة $x^2 - 1000.01x + 1.2 = 0$ لخمسة أرقام معنوية.

أ. بطريقة القانون العام.

ب. باستخدام الضرب بالمرافق

حل المعادلة اللاخطية

Solving Non – Linear Equation

الفصل الثالث

حل المعادلة اللاخطية

Solving Non – Linear Equation

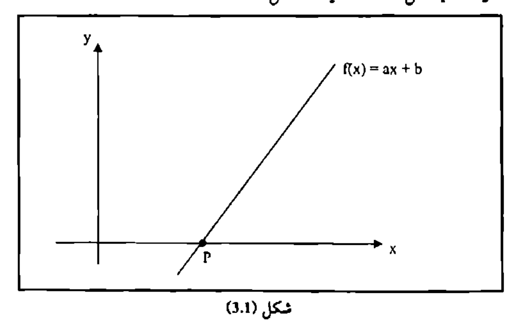
مقدمة Introduction،

ليس من النادر ان نقف حائرين امام معادلة جبرية لا نعرف كيف نبدأ في ايجاد حلها. ذلك ان المعادلة هذه يمكن ان تكون من الصعوبة بحيث لا مجال للتفكير بها. لكن لا تيأس فهناك وسائل اخرى لايجاد الحل التقريبي.

نعلم ان المعادلة الخطية هي متعددة حدود من الدرجة الأولى.

$$f(x) = ax + b \qquad (1)$$

وهندسياً تمثل خطاً مستقيماً؛ شكل (3.1)



شكل (3.1)

فعندما نتحدث عن حل (Solution) المعادلة يعني ان نجد قيمة x التي تجعل الدالة تساوي صفراً.

$$f(x) = ax + b = 0$$

ونسمى هذه القيمة جذراً (root) او صفراً (zero).

اما المعادلة اللاخطية فهي اية معادلة غير خطية، فهي قد تحتوي متعددات حدود من درجة غير الاولى و، أو دوال من أنواع اخرى.

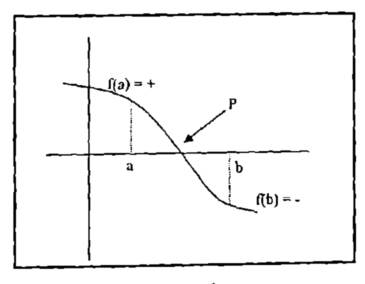
في المعادلة اللاخطية.

$$f(x) = 0 \qquad (2)$$

نبحث عن قيمة x التي تحقق المعادلة (شكل (3.2)) فاذا لم نستطع ذلك نبحث عن $\tilde{x}$ بحيث:

$$f(\tilde{x}) = 0 \qquad (3)$$

قد يكون البحث عن الجذر بمرحلتين، الاولى: تحديد موقع الجذر، والثانية تحديد قيمة الجذر.



شكل (3.2)

ففي المرحلة الاولى علينا ان نحدد فقط ان الجذر يقع في مجال معين كي يكون بحثنا مركز في ذلك المجال. ذلك عندما تكون الدالة f تحقق شروط نظرية القيمة البينية فاننا اما:

أ. نكون جدولاً بقيم الدالة للتعرف على الفترة التي تغير فيها الدالة اشارتها من سالب إلى موجب أو العكس.

مثلاً للدالة $f(x)=\ell_n x-\frac{x}{10}$ نكون جدولاً بدءاً من x=1.0 وبخطوات طولها 0.1.

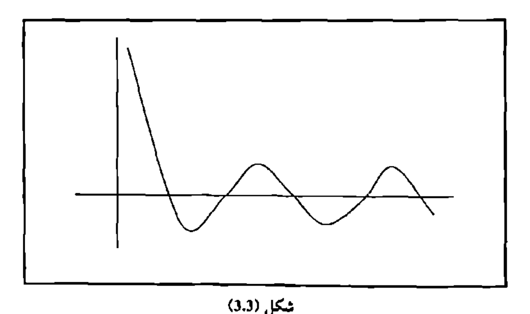
جدول (1)

x	f(x)
1.0	−0.100
1.1	−0.015
1.2	+0.062
1.3	+0.132

نلاحظ ان جذراً لابد ان يقع في الفترة (1.2، 1.1)

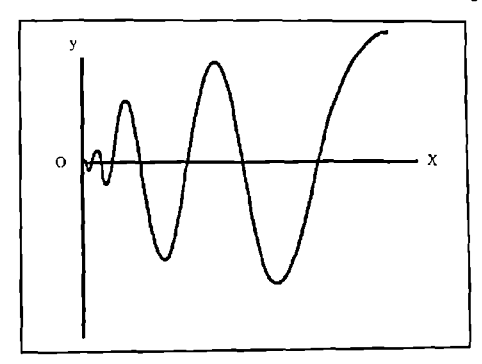
أو

ب. برسم الدالة، حيث يوضح لنا كيفية تصرف الدالة كأن لا يكون لها جذور سالبة أو انها سريعة التذبذب مما يعطينا فكرة عن كثافة الجذور في منطقة البحث.



شكل (3.3)

دالة ليس لها جذور سالبة على الأقل قرب نقطة الأصل



شكل (3.4)

دالة سريعة التذبذب

او

ج. بتجزئة الدالة إلى جزئين يسهل رسمهما، فحيث ان $f(x)=0$، نجزئ f إلى f1 و f2 ونكتبها بالصورة

$$f_1(x) = -f_2(x)$$

بحيث ان كل من f_1 و f_2 دالة بسيطة، نرسمهما على نفس المخطط فتتقاطعان عند نقطة هي بالاصل جذر للمعادلة $f(x) = 0$

مثال 1:

لنأخذ المعادلة.

$$f(x) = x^3 + x + k \qquad (4)$$

(لاحظ ان كل من x و x^3 لها نفس الاشارة).

كونها متعددة حدود من الدرجة الثالثة، يمكن ان يكون لها ثلاثة جذور. نجد المشتقة.

$$f'(x)=3x^2+1\neq 0$$

بما ان الدالة متصلة وقابلة للاشتقاق عند كل نقطة x اذن لا توجد نقطتين b,a بحيث ان f(a) = f(b) (بحسب نظرية رول). وذلك يعني انه لا توجد نقطتين a و b بحيث $f(a) = f(b) = 0$

فهل يوجد جذر واحد؟

نضع الدالة بالشكل

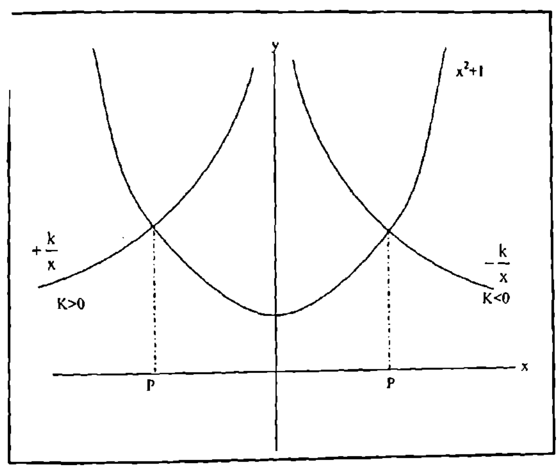
$$x^3+x=-k \quad (5)$$

نجد انه اذا كانت x سالبة فان K موجبة والعكس اذا كانت x موجبه فان K سالبة.

نكتب (5) بالشكل.

$$x^2+1=\frac{-k}{x} \quad (6)$$

ونرسم كلا الطرفين في (6) كدالتين منفصلتين لكن على نفس المخطط ولقيمتين لـ K واحدة موجبة والاخرى سالبة (شكل (3.5)). واضح ان موقع وقيمة الجذر تعتمد على k.



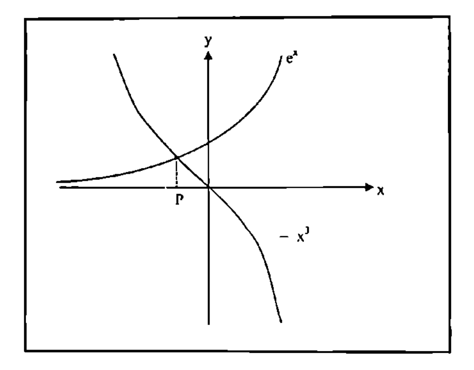
شكل (3.5)

قد لا تكون الدالة في المثال السابق من التعقيد بحيث لا يمكن استقراء موقع الجذر، لكن دالة مثل:

$$f(x) = e^x + x^3 = 0$$

ليس من السهل تخمين موقع الجذر. لكن بتجزئتها بحيث تكون $e^x = -x^3$

تسهل الامر كثيراً. اذ ان رسم كلا الدالتين e^x و $-x^3$ امراً سهلاً وشائعاً (شكل (3.6)).



شكل (3.6)

في كل الطرق الســالفة الذكر كنا فقط قادرين على تحديد موقع الجذر، اما قيمتــه العددية فلم يكن بالامكان الا تحديد العدد الصحيح وقد تزيد مرتبة عشرية واحدة لا اكثر. هذا يدفعنا إلى التعرف على الطرق الحثيثة في ايجـاد الجـذر وسـنتعرض للـبعض منها.

3.1 طريقة التنصيف Bisection Method:

بعد ان تمكنا من تحديد موقع الجذر، إذن يمكن ان نعين نقطـتين x_1 و x_2 يكـون الجذر بينهما بحيث $x_1 < x_2$ و

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0 \tag{7}$$

وبما ان اي منهما ليس جذراً فان افضل اختيار جديد كتخمين للجذر هو نقطـة المنتصف.

$$P = \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{8}$$

فاذا لم تكن P هي الجذر فانه يكون اما في الفترة (x_1,P) أو في (P,x_2) ويمكن ان نحدد ذلك باجراء الاختبار الآتي:

(9) اذا كان $f(P).\ f(x_1) < 0$

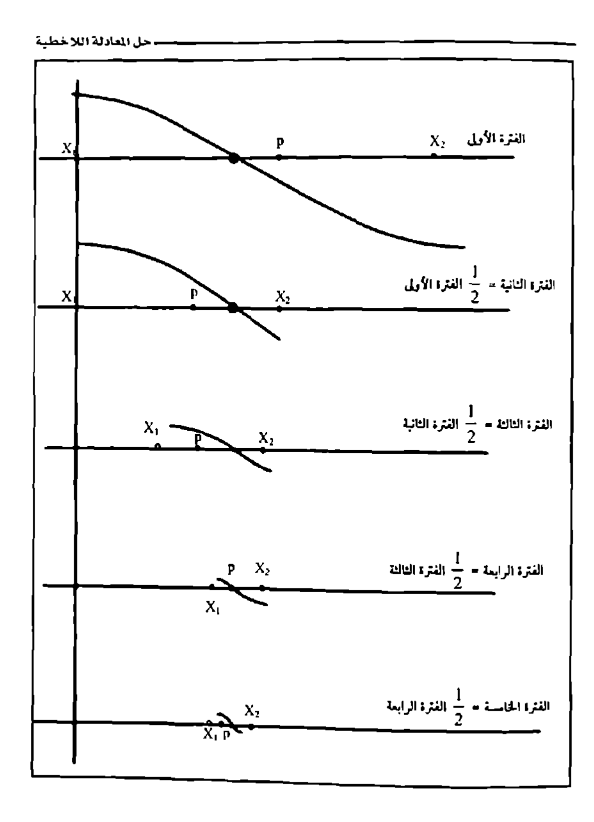
فان الجذر يقع بين x_1 وP، والا فانه يقع بين x_2 وP نتبنى الفترة الحاوية على الجذر ونهمل الاخرى ونقوم بعملية التنصيف مرة اخرى كما في (8) و (9)... حتى نتوقف عندما يكون

$$\left|\frac{x_1 - x_2}{2}\right| < \varepsilon \qquad (10)$$

او

$$f(p) < \varepsilon \qquad (11)$$

حيث ε هي مقدار الخطأ المسموح به. (شكل (3.7)).


الفترة الأولى
X_1
P
X_2
الفترة الثانية = $\frac{1}{2}$ الفترة الأولى
X_1
P
X_2
الفترة الثالثة = $\frac{1}{2}$ الفترة الثانية
X_1
P
X_2
الفترة الرابعة = $\frac{1}{2}$ الفترة الثالثة
P
X_2
X_1
الفترة الخامسة = $\frac{1}{2}$ الفترة الرابعة
X_2
X_1
P

مثال (2):

لتكن لدينا المعادلة.

$$f(x) = 3x^3 - x + 1$$

لأجل البدء بإيجاد الجذر لابد لنا من تحديد الفترة التي نبحث فيها، ذلك بعمل جدول بسيط للدالة وملاحظة تغير الإشارة عند الانتقال من نقطة إلى اخرى. بوضوح نلاحظ ان جذراً يقع بين $x_1=-1$ و$x_2 = 0$ (جدول (2)) فإذا اردنا ان نحصل على جذر بخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 0.0005$، نلاحظ من الجدول (3) اننا حصلنا على ذلك في احد عشر تكراراً. لاحظ كيف ان النقطة P تغير موقعها بحسب تغير موقع $f(p)$

جدول (2)

x	f(x)
-2	-21
-1	-1
0	+1
1	+3

جدول (3)

n	x_1	x_2	P	$f(x_1)$	$f(x_2)$	f(P)	error = $\left\|\frac{x_1 - x_2}{2}\right\|$
1	-1	0	-0.5	-1	+1	1.125	0.5
2	-1	-0.5	-0.25	-1	1.125	0.484375	0.25
3	-1	-0.75	-0.875	-1	0.484375	-0.134766	0.125
4	-0.875	-0.75	-0.8125	-0.134766	0.484375	0.203369	0.0625
5	-0.875	-0.8125	-0.84375	-0.134766	0.203369	0.041718	0.03125
6	-0.875	-0.84375	-0.859375	-0.134766	0.041718	-0.044636	0.015625
7	-0.859375	-0.84375	-0.851563	-0.044636	0.041718	-0.000991	0.007813
8	-0.851563	-0.84375	-0.847657	-0.000991	0.041718	+0.020479	0.003906
9	-0.851563	-0.847657	-0.84961	-0.000991	0.020479	0.009770	0.001953
10	-0.851563	-0.84961	-0.850587	-0.000991	0.009770	0.004396	0.000977
11	-0.851563	-0.850587	-0.851075	-0.000991	0.004396	0.001701	0.000488
12	-0.851563	-0.851075	-0.851319	-0.000991	0.001701	0.000354	0.000244

نظرية (3.1)

لتكن $f \in C[a,b]$ ولنفرض ان $f(a) \cdot f(b) < 0$ ان طريقة التنصيف تولد متابعه $\{P_n\}$ تتقارب إلى P وتحقق الخاصية.

$$|P_n - P| \leq \frac{b-a}{2^n} , \qquad n \geq 1 \qquad (12)$$

البرهان:

نعتبر ان $a_1 = a$ و $b_1 = b$

وان

$$p_n = \frac{b_n + a_n}{2}, \qquad n \geq 1$$

لكل n نجد ان

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}(b-a)$$

وان $p \in (a_n, b_n)$

فمن (12) ينتج ان:

$$|p_n - p| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = 2^{-n}(b-a)$$

في المثال (2) نلاحظ ان الجذر الصحيح لستة مراتب عشرية هو P=0.851383 وهو يبعد عن الجذر في التكرار (11) من الجدول بالمقدار.

$$|p - p_{11}| = |-0.851383 + 0.851075| = 0.000308$$

في حين ان النظرية (3.1) تعطي التقدير الآتي:

$$|p - p_{11}| \leq \left|2^{-11}(-1-0)\right| = 0.000488$$

وهو ما يحقق النظرية.

ان الصفية (12) تستخدم لتقدير عدد التكرارات الكافية لايجاد الجذر P_n بخطأ مسموح به ε.

فمن المعلوم ان الخطأ $|p_n - p|$ يجب ان لا يزيد على المقدار المسموح به ε، يعني انه يجب ان يكون.

$$2^{-n}(b-a)<\varepsilon$$

او
$$2^{n} < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

يعني ان:
$$n > \frac{\ell n(b-a)-\ell n(\varepsilon)}{\ell n(2)}$$

فلو اردنا تخمين عدد التكرارات اللازمة للحصول على جذر بخطأ لا يزيد على 0.005 من المثال السابق فان:

$$n > \frac{\ell n(0+1)-\ell n(0.005)}{\ell n 2} = 7.6$$

أي ان عدد التكرارات لابد ان يكون اكبر من أو يساوي 8.

خوارزمية طريقة التنصيف:

لايجاد حلاً للمعادلة $f(x) = 0$ وبدقة معينة لا يتجاوز الخطأ فيها مقدار صغير ε، حيث x_1، x_2 معطاة بحيث $f(x_1)$ و $f(x_2)$ مختلفتين بالاشارة.

طالما أن:
$$\frac{1}{2}|x_1 - x_2| \geq \varepsilon$$

ضع
$$x_3 = (x_1 + x_2)/2$$

اذا كان $f(x_3)$ له اشارة على عكس أشارة $f(x_1)$.

ضع
$$x_2 = x_3$$

والا ضع
$$x_1 = x_3$$

انتهى.

تعتبر x_3 هي الجذر المطلوب.

تمارين

1. استخدم طريقة الجدول لتعيين فترة بطول 0.2 يقع فيها جذر موجب للمعادلة $x^2 - 2 = 0$
2. عين موقع الجذر للمعادلة اعلاه باستخدام تجزئة المعادلة.
3. كم تكراراً (تنصيفاً) تحتاج لكي تصل إلى الجذر المشار اليه اعلاه وبدقة $\varepsilon = 0.0001$؟
4. استخدم طريقة التنصيف مبتدئاً بالفترة المعينة في 1- لايجاد الجذر بالدقة المعينة في 3- .
5. اجر نفس الخطوات كما في التمارين 1-4 على المعادلة. $f(x)$

$f(x) = e^x - \cos(\pi x) - 1.0 = 0$

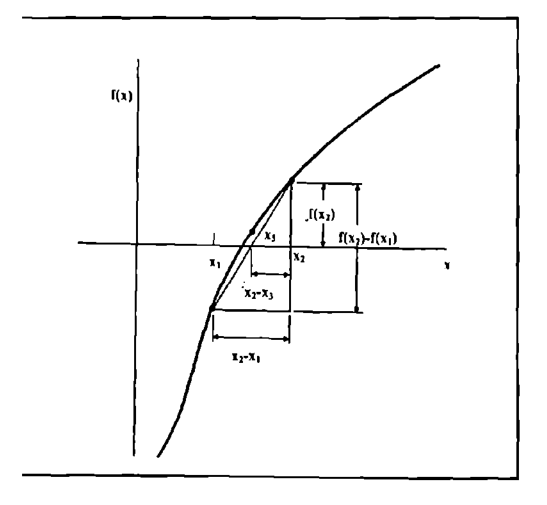
باحثاً عن اول جذر موجب داخل فترة طولها 1.0 وبدقة $\varepsilon = 5\times10^{-4}$

3.2 طريقة الموضع الكاذب False Position Method:

رغم بساطة طريقة التنصيف الا انها بطيئة في الوصول إلى الجذر، فهي تـ على تنصيف الخطأ في التكرار السابق.

$$e_n = \frac{1}{2} e_{n-1} \qquad n \geq 1$$

لكن لو قربنا الدالة قرب الجذر بخط مستقيم، فاننا لحصل على جذر تقريبي هو تقاطع المستقيم مع المحور x وهذا ما يسمى بالموضع الكاذب للجذر (شكل (3.8)).



شكل (3.8)

لاحظ أن الجذر يقع بين x_1,x_3، لذا نقوم بنفس العمل السابق وكأن الفترة الجديدة هي $[x_1,x_2]$.

لإيجاد x_3، من تشابه المثلثات في الشكل (3.8) نكتب التناسب.

$$\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}$$

اذن

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(x_2) - f(x_1)}(x_2 - x_1) \qquad (13)$$

وبنفس الأسلوب كما في طريقة التنصيف نختار الفترة التي تحتوي الجذر.

ولأجل المقارنة بين طريقة التنصيف وطريقة الموضع الكاذب من حيث سرعة التقارب نستخدم المعادلة، [7].

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$$

ونلاحظ الجدولين (4) و (5) فنكتشف الفرق في عدد التكرارات.

جدول (4)

طريقة الموضع الكاذب لحل المعادلة $f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3 = 0$

	x_1	x_2	x_3	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$
1	1.0	2.0	1.57142	−4.0	3.0	−1.36449
2	1.57142	2.0	1.70540	−1.36449	3.0	−0.24784
3	1.72788	2.0	1.72788	−0.24784	3.0	−0.03936
4	1.72788	2.0	1.73140	−0.03936	3.0	−0.00615
5	1.73140	2.0	1.73194			

جدول (5)

طريقة التصيف لحل المعادلة $f(x)=x^3+x^2-3x-3=0$

	x_1	x_2	x_3	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	e
1	1	2	1.5	-4.0	3.0	−1.875	0.5
2	1.5	2	1.75	−1.875	3.0	0.17187	0.25
3	1.5	1.75	1.625	−1.875	0.17187..	-0.94335...	0.125
4	1.625	1.75	1.6875	−0.94335...	0.17187	0.40942	0.0625
5	1.6875	1.75	1.71875	−0.40942...	0.17187...	−0.12478	0.03125
6	1.71875	1.75	1.73437...	−0.12478...	0.17187..	−0.02198	0.015625
7	1.71875	1.73437...	1.72656...				0.0078125
	⋮	⋮	⋮				
∞			1.73205...			−0.00000...	

رغم اننا نلاحظ في جدول (4) ان النقطة x_2 لم تغير قيمتها يعني ان x_1 فقط هي التي تقترب من الجذر وهذه تعتبر من مساويء صيغة الموضع الكاذب. ذلك يعتمد على مقدار التقعر قرب الجذر، كلما زاد التقعر كلما استفحلت هذه الظاهرة.

خوارزمية طريقة الموضع الكاذب

لايجاد جذر للمعادلة $f(x) = 0$، حيث x_1، x_2 معطاة وان $f(x_1)$ و $f(x_2)$ لهما اشارات مختلفة وان ε_1 هو الخطأ المسموح به للاختبار $|x_1 - x_2|$، ε_2 هو الخطأ المسموح به للاختبار $|f(x_3)|$

ما دامت $|x_2 - x_1| \geq \varepsilon_1$

أو $|f(x_3)| \geq \varepsilon_2$

ضع

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

اذا كانت($f(x_3)$ لها إشارة مختلفة عن إشارة $f(x_1)$

ضع $x_2 = x_3$

والا ضع $x_1 = x_3$

انتهى.

3.3 طريقة نيوتن رافسن Newton – Raphson's Method:

تعتمد هذه الطريقة على تقريب الدالة قرب الجذر بمماسها فباختيار نقطة x_1 قريبة من الجذر نرسم مماساً للدالة عند x_1 ليقطع المحور x في x_2 ويصنع زاوية θ مع المحور x (شكل (3.9))

في المثلث القائم في x_1 يكون:

$$\tan\theta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

ومنها فان:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (14)$$

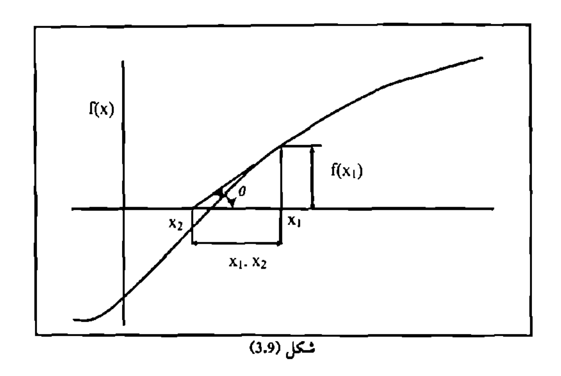
فمثلاً لايجاد حل المعادلة $f(x) = x^2 - 7$

نختار نقطة بين 2و 3 ولتكن $x_1 = 2.5$ كنقطة تخمين اولية للجذر. بتطبيق (14) نحصل على:

$$x_2 = 2.5 - \frac{x_1^2 - 7}{2x_1}$$

$$= 2.5 - \frac{6.25 - 7}{2(2.5)} = 2.65$$

نكرر العملية باسناد قيمة x_2 إلى x_1 نحصل على الجدول (6)



شكل (3.9)

جدول (6)

n	x_n	$f(x_n)$
1	2.5	−0.75
2	2.65	0.0225
3	2.645755	1.952×10^{-5}
4	2.645751	1.646×10^{-6}

واضح اننا توقفنا عندما اصبح الفرق بين x_3, x_4 صغير جداً.

$$|x_3 - x_4| < 0.000004$$

اي ان x_4 هي جذراً صحيحاً لخمس مراتب عشرية للمعادلة المطلوبة وذلك ما يعززه العمود الثالث في الجدول.

استنتاج صيغة نيوتن رافسن بواسطة سلسلة تيلر:

لاجل ان ندرس صيغة نيوتن تحليلياً فاننا سندرج الاستنتاج التحليلي للصغية باستخدام نشر تيلر للداله فبفرض ان x_1 هي التخمين الاولي للجذر P فان:

اذا كانت $f(x_3)$ لها إشارة مختلفة عن إشارة $f(x_1)$

ضع $x_2 = x_3$

والا ضع $x_1 = x_3$

انتهى.

3.3 طريقة نيوتن رافسن Newton – Raphson's Method

تعتمد هذه الطريقة على تقريب الدالة قرب الجذر بمماسها فباختيار نقطة x_1 قريبة من الجذر نرسم مماساً للدالة عند x_1 ليقطع المحور x في x_2 ويصنع زاوية θ مع المحور x (شكل (3.9))

في المثلث القائم في x_1 يكون:

$$\tan\theta = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} = f'(x_1)$$

ومنها فان:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (14)$$

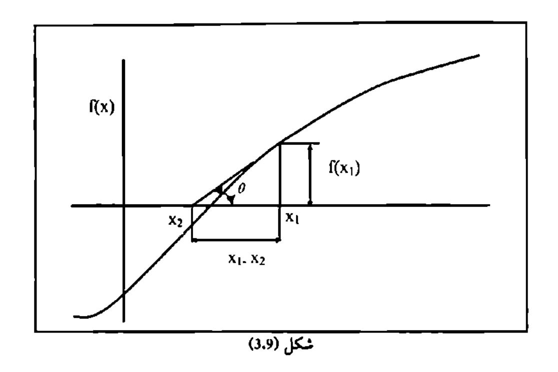
فمثلاً لايجاد حل المعادلة $f(x) = x^2 - 7$

نختار نقطة بين 2و 3 ولتكن $x_1 = 2.5$ كنقطة تخمين اولية للجذر. بتطبيق (14) نحصل على:

$$x_2 = 2.5 - \frac{x_1^2 - 7}{2x_1}$$

$$= 2.5 - \frac{6.25 - 7}{2(2.5)} = 2.65$$

نكرر العملية باسناد قيمة x_2 إلى x_1 لنحصل على الجدول (6)



شكل (3.9)

جدول (6)

n	x_n	$f(x_n)$
1	2.5	–0.75
2	2.65	0.0225
3	2.645755	1.952×10^{-5}
4	2.645751	1.646×10^{-6}

واضح انا توقفنا عندما اصبح الفرق بين x_3, x_4 صغير جداً.

$$| x_3 - x_4 | < 0.000004$$

أي ان x_4 هي جذراً صحيحاً لخمس مراتب عشرية للمعادلة المطلوبة وذلك ما يعززه العمود الثالث في الجدول.

استنتاج صيغة نيوتن رافسن بواسطة سلسلة تيلر:

لاجل ان ندرس صيغة نيوتن تحليلياً فاننا سندرج الاستنتاج التحليلي للصنية باستخدام نشر تيلر للداله فبفرض ان x_1 هي التخمين الاولي للجذر P فان:

$h = p - x_1$

نشر الدالة $f(p)$ حول النقطة x_1 بواسطة سلسلة تيلر.

$$f(p) = f(x_1) + \frac{p - x_1}{1!} f'(x_1) + \frac{(p - x_1)^2}{2!} f''(\theta) \qquad (15)$$

حيث θ تقع بين $x1$ و P.

وعندما يكون التخمين الأولي x_1 قريب من P فان الحد الأخير في (15) يهمل لتعطي.

$$f(p) = f(x_1) + h f'(x_1) + \text{error} \qquad (16)$$

أي باهمال حد الخطأ يكون

$$h = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وهي تمثل المقدار المطلوب اضافته إلى x_1 لكي نصل إلى نقطة جديدة x_2 والتي هي تقريب أحسن للجذر من x_1 أي ان:

$$x_2 = x_1 + h$$
$$= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وهذه هي المعادلة (14)

لاحظ ان حد الخطأ هو من الرتبة الثانية $O(h^2)$، وهذا ما يجعل الصيغة مفضلة على كثير من الصيغ.

اهمية رتبة الخطأ:

عند نشرنا للدالة $f(p)$ بواسطة سلسلة تيلر استخدمنا الفرق بين نقطة الانتشار والنقطة المطلوبة ورمزنا لهذا الفرق بالرمز h ان هذا الفرق هو الذي يعطينا فكرة عن مدى قربنا من الجذر المطلوب. وكلما كانت h كبير يعني زيادة في الخطأ علماً أن h لابد ان تكون اقل من الواحد دائماً. ولذلك فان القوة المرفوعة لها h تعتبر مؤشراً مهماً على كفاءة الطريقة المستخدمة فبزيادة هذه القوة يكون مقدار الخطأ اصغر والعكس صحيح.

مثال 3: [8]

جد جذراً قريباً من نقطة الاصل للمعادلة.

$$f(x) = 3x + \sin(x) - e^x$$

الحل:

باختيار $x_1 = 0$

حيث

$$f'(x) = 3 + \cos x - e^x$$

نحصل على النتائج التالية:

$x_2 = 0.33333$
$x_3 = 0.36017$
$x_4 = 0.3604217$

وهو صحيح لسبع مراتب عشرية بعد ثلاثة تكرارات فقط.

3.4 طريقة القاطع Secant Method

ان سرعة التقارب في صيغة نيوتن رافسن يقابلها الحاجة لايجاد قيمة ليس الدالة فقط بل ومشتقتها عند كل نقطة جديدة وهذا يعني مضاعفة العمل في كل تكرار. كما انه يمكن ان تكون قيمة المشتقة عند نقطة ما صفراً مما يؤدي إلى توقف العملية كاملاً. لهذه الأسباب فانه في بعض الأحيان نضطر إلى التعويض عن المشتقة بتقريبها بالنسبة الآتية:

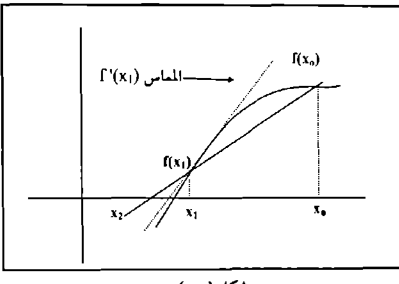
$$f'(x_n) \simeq \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad (17)$$

فتصبح

$$x_2 = x_1 - f(x_1) . \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \quad (18)$$

وهي نفس المعادلة (13).

ان المعادلة (17) تحول المماس إلى قاطع (شكل (3.10))



شكل (3.10)

كما واضح من الرسم فان التخمينين الاولين x_0 و x_1 يقعان على جهة واحدة من الجذر وهذا وجه الاختلاف مع طريقة الموضع الكاذب. ولذلك فعند ايجاد التكرارات المتالية فانا لا نأخذ بالاعتبار تغير اشارة الدالة كما يحدث في طريقتي التنصيف والموضع الكاذب، بل تتبادل النقاط مواقعها بالتابع.

يمكن استنتاج صيغة القاطع من تشابه المثلثين $f(x_1)\ x_2x_1$ و $f(x_0)x_2x_0$ نحصل على:

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}$$

ومنها فان:

$$x_2 = \frac{f_1 x_0 - f_0 x_1}{f_1 - f_0}$$

$$= \frac{x_1 f_1 - x_1 f_0 - x_1 f_1 + x_0 f_1}{f_1 - f_0}$$

$$= x_1 - f_1 \frac{(x_1 - x_0)}{(f_1 - f_0)}$$

ولمعرفة تأثير هذا التغيير على سرعة الحل نعيد حل المعادلة.

$$f(x) = x^2 - 7$$

ونفرض ان $x_0=1$ ، $x_1 = 2.5$

قارن الجدول (6) مع جدول (7)

جدول (7)

	x_0	x_1	x_2	f_0	f_1	f_2
1	1	2.5		−6	−0.75	
			2.714286			0.367347
2	2.5	2.714286		−0.75	0.367347	
			2.643836			−0.010133
3	2.714286	2.643836		0.367347	-0.010133	
			2.645727			−0.000128

3.5 طريقة النقطة الثابتة Fixed point Method:

في كل الطرق التي استعرضناها كنا نستخدم صيغة عامة للعملية التكرارية وهي:

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad (19)$$

وتختلف صورة $g(x_n)$ باختلاف الطريقة. من هذا فان المسألة العامة:

$$f(x) = 0 \qquad (20)$$

يمكن ان توضع بالشكل التكراري (19) ذلك بواسطة تجزئة الدالة $f(x)$ حيث:

$$f(x)=g(x)+h(x)=0$$

أو

$$-h(x)=g(x)$$

وبوضع

$$-h(x)=x$$

واختيار x_0 كتخمين أولي للجذر وتحت تأثير الدالة g لحصل على x_1 حيث:

$$x_1 = g(x_0) \qquad (21)$$

وهكذا تتكون الصغية التكرارية (19) لتقارب إلى الحل الحقيقي الذي يحقق المعادلة (20)

مثال (4):

للدالة $f(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ جذران هما $x=3$، $x = -1$. فبترتيب الدالة f بالصورة:

$$x = \sqrt{2x + 3} \quad (22)$$

وبدءاً من $x_0 = 4$ نحصل على التكرارات الآتية (جدول (8)).

جدول (8)

n	x_n
0	4
1	3.316
2	3.104
3	3.034
4	3.011
5	3.004

تقربنا للجذر 3 بخمس تكرارات وبقيم تنازلية نحو الجذر

كما هو واضح فان (22) هي ليست الصورة الوحيدة وانما يمكن وضع f(x) بصور مكافئة اخريات فمثلاً.

$$x = 3/(x-2) \quad (23)$$

وابتداءاً عند $x_0 = 4$ نحصل على التكرارات التالية:

جدول (9)

n	x_n
0	4
1	1.5
2	−6
3	−0.375
4	−1.263
5	−0.919
6	−1.028
7	−0.991
8	−1.003

هنـــا تقربنـــا للجـــذر 1.0- وبثمـــان تكـــرارات (لاحـــظ تذبـــذب قـــيم x_n حول 1-) اما لو استخدمنا الصيغة المكافئة الاخرى.

$$x = \frac{x^2 - 3}{2} \qquad (24)$$

ولنفس نقطة البداية $x_0 = 4$ نحصل على ما يلي:

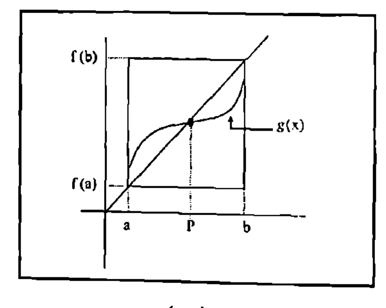
جدول (10)

n	x_n
0	4
1	6.5
2	19.635
3	191.0

انها تتباعد!! ما هو سر هذا الاختلاف في سلوك الدالة g في كل مرة؟ انه صيغة الدالة g. كيف؟ سنرى الان.

تعريف 1:

لتكن g دالة متصلة في الفترة [a,b] وان لكل $x \in [a,b]$ فان $g(x) \in [a,b]$ لتكن $p \in [a,b]$ يقال ان P نقطة ثابتة اذا كان $g(p) = p$



شكل (3.11)

نظرية (3.2)

لتكن $g\in C[a,b]$ وان $g(x)\in[a,b]$ لكل $x\in[a,b]$، ان g لها نقطة ثابتة في $[a,b]$. واذا كانت $g'(x)$ موجودة على (a,b) بحيث:

$$|g'(x)| \le k < 1 \qquad \forall x \in (a,b) \qquad (25)$$

فان النقطة الثابتة وحيدة في $[a,b]$

البرهان:

اذا كانت $g(a) = a$ أو $g(b) = b$ فواضح انها نقطة ثابتة والا فان $g(a) > a$ و $g(b) < b$. لنعرف دالة $h(x)$ حيث $h(x) = g(x) - x$ وهي دالة متصلة على $[a,b]$ نلاحظ ان:

$$h(b) = g(b) - b < 0 \qquad , \qquad h(a) = g(a) - a > 0$$

ومن نظرية القيمة البينية (Intermediate value Theorem) فانه توجد نقطة $p\in(a,b)$ بحيث $h(p) = 0$. فاذا كانت $g'(x)$ موجودة وأن (25) متحققة، نفرض ان هناك نقطتين ثابتين هما P و q وأن $P\neq q$ وكلاهما في $[a,b]$. ان كون g تحقق شروط نظرية متوسط القيمة (M.V.T.) يعني هناك نقطة ξ بين P و q بحيث أن:

$$|p-q| = |g(p)-g(q)| = |g'(\xi)||p-q| \le k|p-q| < |p-q|$$

وهذا تناقض وسببه افتراض ان $P\neq q$، اذن النقطة P وحيدة.

النظرية السابقة تقودنا إلى ما يلي:

نظرية (3.3)

لتكن $g\in C[a,b]$ وان $g(x)\in[a,b]$ لكل $x\in[a,b]$ ولتكن g' موجودة على (a,b) بحيث ان $g'(x)\le k<1$ لكل $x\in(a,b)$، اذا كانت P_0 هي اي نقطة في $[a,b]$ فان المتتالية.

$$p_n = g(p_{n-1}) \qquad ,n\ge 1 \qquad (26)$$

تتقارب إلى النقطة الثابتة P.

البرهان:

بحسب تعريف الدالة g فان كل النقاط $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ هي في الفترة [a,b] ومن نظرية متوسط القيمة فانه توجد نقطة ξ في (a,b) بحيث:

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| \le |g'(\xi)|\,|p_{n-1} - p| \le k|p_{n-1} - p|$$

وهذا ينطبق على النقطتين p_{n-1} و p أي أن:

$$|p_{n-1} - p| = |g(p_{n-2}) - g(p)| \le |g'(\xi_1)|\,|p_{n-2} - p| \le k|p_{n-2} - p|$$

وهكذا بالتطبيق على النقاط التالية نحصل على:

$$|p_n - p| \le k|p_{n-1} - p| \le k^2|p_{n-2} - p| \le \dots\dots\dots \le K^n|p_0 - p|$$

وحيث ان $k < 1$ فان:

$$\lim_{n\to\infty}|p_n - P| \le \lim_{n\to\infty} k^n|p_0 - p| = 0 \qquad (27)$$

أي ان P هي نهاية المتالية Pn عندما $n \to \infty$

يتضح ان مشتقة الدالة g تلعب الدور الاساس في التقارب. وبالعودة إلى المثال (4) نلاحظ ان الدالة $g_1(x) = \sqrt{2x+3}$ لها المشتقة.

$$|g_1'|_{x=4} = \left|\frac{1}{\sqrt{2x+3}}\right| < 1$$

والدالة $g_2(x) = \dfrac{3}{x-2}$ مشتقتها هي

$$|g_2'|_{x=4} = \left|\frac{-3}{(x-2)2}\right| < 1$$

اما الدالة $g_3(x) = \dfrac{x^2-3}{2}$ فان مشتقتها

$$|g_3'|_{x=4} = |x| > 1$$

لاحظ الاشارة السالبة لمشتقة الدالة g_2، ذلك ما يفسر تذبذب التكرارات حول الجذر.

يمكن استخدام ناتج نظرية (3.3) لتحديد عدد التكرارات اللازم لتقريب الجذر بدقة معينة ε.

نتيجة:

اذا كانت الدالة g تحقق منطوق النظرية (3.3) فان:

$$|p_n - p| \le \frac{k^n}{1-k}|p_0 - p_1| \quad , \quad n \ge 1 \tag{28}$$

البرهان:

باستخدام نفس الاسلوب كما في برهان نظرية (3.3) نجد ان:

$$|p_{n+1} - p_n| \le k|p_n - p_{n-1}| \le k^n|p_1 - p_0|$$

نفرض ان $m > n \ge 1$، يكون.

$$|p_m - p_n| = |p_m - p_{m-1} + p_{m-1} - \dots + p_{n+1} - p_n|$$
$$\le |p_m - p_{m-1}| + |p_{m-1} - p_{m-2}| + \dots + |p_{n+1} - p_n|$$
$$\le k^{m-1}|p_1 - p_0| + k^{m-2}|p_1 - p_0| + \dots + k^n|p_1 - p_0|$$
$$= k^n|p_1 - p_0|(k^{m-n-1} + k^{m-n-2} + \dots + k^0)$$

وحيث ان $\lim_{m\to\infty} p_m = p$ بحسب (27) فان

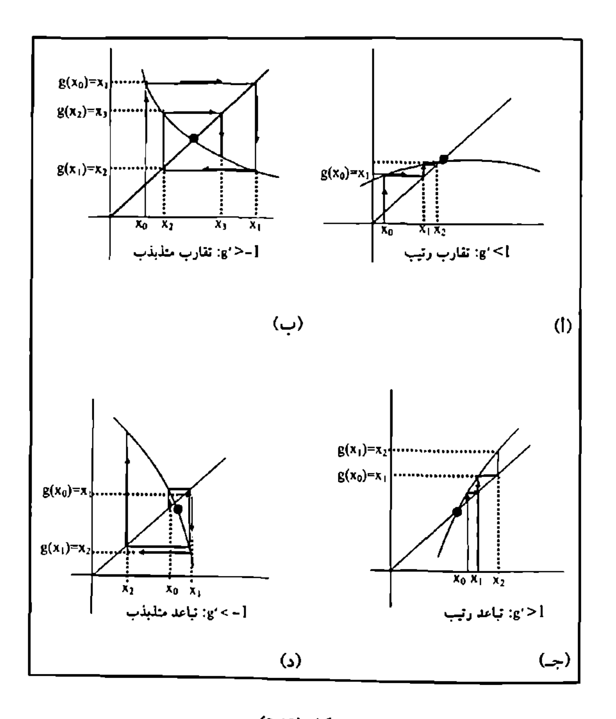
$$|p - p_n| = \lim_{m\to\infty} < |p_m - p_n| \le k^n|p_1 - p_0|\sum_{i=0}^{\infty} k^i$$

$$= \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$$

فاذا تمكنا من تحديد قيمة k فاننا نستطيع تخمين عدد التكرارات اللازمة للحل بخطأ مسموح به قيمته ε من خلال الصيغة:

$$n > \ell n\left(\frac{(1-k)\varepsilon}{|x_1 - x_0|}\right) / \ell n(k) \tag{29}$$

في الأشكال التالية عرض لحالات التباعد والتقارب.



شكل (3.12)

3 رتبة التقارب Order of Convergence:

في الفقرة (3.3) بينا أهمية رتبة التقارب، ولكن كيف نحدد الرتبة؟ هذا ما اناقشه الآن.

من نشر الدالة g(x) بواسطة سلسلة تيلر حول الجذر P، بفرض أن g متصلة بلة للاشتقاق، نحصل على:

$$x_{n+1}=g(x_n)=g(p)+(x_n-p)g'(p)+\frac{(x_n-p)^2}{2!}g''(p)+\cdots \tag{30}$$

$$|x_{n+1}-p|\simeq|x_n-p||g'(p)| \tag{31}$$

أي ان

$$e_{n+1}\simeq e_n g'(p) \tag{32}$$

وهذا يعني أن الخطأ في التكرار n+1 يعتمد خطياً على الخطأ في التكرار n مز له.

$$e_{n+1}\propto e_n^1 \tag{33}$$

وطبعاً نحن نبحث عن تناسب من رتبة أعلى، أي:

$$e_{n+1}\propto e_n^k \qquad k>1 \tag{34}$$

فإذا رغبنا في جعل k = 2 فذلك يتطلب منا ان نبتر السلسلة (30) بعد الحد لث (المشتقة الثانية للدالة g) فتكون:

$$x_{n+1}=g(p)+(x_n-p)g'(p)+\frac{(x_n-p)^2}{2!}g''(\theta) \tag{35}$$

حيث θ تقع بين xn و P

ومنها نحصل على

$$e_{n+1}\simeq e_n g'(P)+\frac{e_n^2}{2}g''(\theta)$$

فاذا رغبنا ان تكون k=2 في (34) فلا بد أن تكون $g'(p)=0$ فينتج

$$e_{n+1} \simeq e_n^2 \frac{g''(\theta)}{2}$$

حيث θ تقع بين x_n وP

بشرط ان تكون $g'' \neq 0$

وبما ان

$$\lim_{n\to\infty} x_n = P$$

فان

$$\lim_{n\to\infty} \theta = P$$

اذن فـان شـرط التقـارب التربيعـي للـصيغة التكراريـة هـو ان $g'(p) = 0$ وان $g'' \neq 0$، وهذا ما تتمتع به صيغة نيوتن رافسن، حيث:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_n}{f'_n} = g(x_n)$$

اذن

$$g'(x_n) = 1 - \frac{(f'_n)^2 - f_n f''_n}{(f'_n)^2}$$

ومنها فان:

$$g'(p) = 0$$

وان

$$g'' \neq 0$$

أما بالنسبة لصيغ القاطع والموضع الكاذب فقد وجد أن رتبة التقارب فيهما $1 < k < 2$

مثال (5):

نفرض ان هناك صيغة تقارب فيها يحدث تقارب خطي حيث:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = 0.4$$

وتقارب تربيعي حيث:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2}=0.4$$

بفرض أن $e_0 = 0.9$

فبعد ثلاثة تكرارات ينتج من التقارب الخطي.

$$e_3 = 0.0576$$

ومن التقارب التربيعي.

$$e_3 = 0.0007$$

مثال (6):

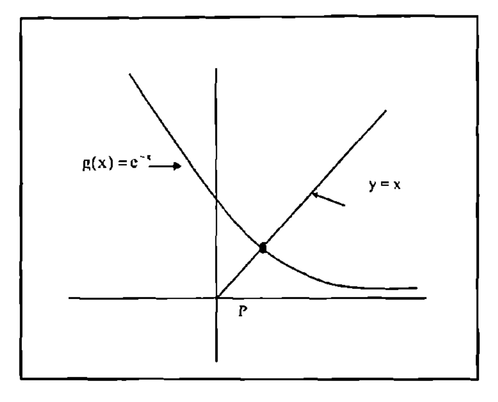
هذا المثال يبين ان شرط التقارب $|g'|<1$ هو شرطاً كافياً وليس ضرورياً حيث ان الدالة.

$$g(x)=e^{-x} \tag{36}$$

تتقارب لاية نقطة ابتدائية x_0 حتى ولو كانت المشتقة $g'(x_0)$ لا تحقق المتباينة $|g'(x)|<1$ فمثلاً عندما تبدأ بالنقطة $x_0=-1$ فاننا نحصل على الجدول الآتي:

جدول (11)

n	x_n
0	-1
1	2.71828
2	0.06599
3	0.93614
4	0.39214
5	0.67561
6	0.50885
7	0.60119
8	0.54816
9	0.57801
10	0.56101



شكل (3.13)

تمارين

1. استخدم طريقة التنصيف لايجاد اصغر جذر موجب للمعادلات الاتية، في كل مرة حدد الفترة المناسبة، ثم احسب الجذر بخطأ نسبي 0.5 ٪

أ. $2e^{-x} - \sin(x) = 0$

ب. $\tan x - x - 1 = 0$

ج. $3x^3 + 4x^2 - 8x - 1 = 0$

د. $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$

2. جد نقطة تقاطع المنحنين $y = 3x$ و $y = ex$ بطريقة التنصيف، صحيحة لاربع مراتب عشرية.

3. بفرض ان الفترة التي تحصر الجذر هي $[a,b]$ والتي فيها $f(a).f(b) < 0$ وان c هو العدد المحسوب بطريقة الموضع الكاذب، وضح ان طول فترة الحصر الجديدة هي:

عندما $f(a) . f(c) < 0$ $$\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(a - b)$$

وعندما $f(b) . f(c) < 0$ $$\frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

4. اوجد جذر المعادلة $f(x) = xe^{x} - 1$ مستخدماً طريقة الموضع الكاذب. مبتدئاً بفترة الحصر أ- [2، 0]، ب- [3، 0] ومتوقفاً عندما يكون $|f(c)| < 0.5 \times 10^{-1}$. اوجد عدد التنصيفات اللازمة لايجاد الجذر بنفس الدقة بطريقة التنصيف لكلتا الفترتين دون اجراء التنصيفات. بين سبب التقارب البطيء.

5. استخدم طريقة نيوتن رافسن لايجاد جذور كل من

أ. $x - \cos x = 0$

ب. $x^2 + \ell n\, x = 0$

ج. $x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0$

مبتدئاً بالنقطة $x_1 = 1.0$ ومتوقفا وعندما يكون

$$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-6}$$

6. استخدم طريقة القاطع في حل المعادلات في السؤال (5) مبتدئاً بالنقطتين $x1 = 2$، $x2 = 1$.

7. بين ان طريقة نيوتن رافسن لحل المعادلة

$$x^K e^x = 0$$

تؤدي إلى الصيغة.

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + x_n^2}{k + x_n}$$

بدئاً بالنقطة $x_0 = 1$ احسب x_5 عندما تكون $k=1$ مرة واخرى عندما تكون $k=$ 2. أي الحالتين اسرع؟ ولماذا؟

8. استخدم صيغة نيوتن رافسن على المعادلة $x^2 = N$ لاستنتاج الخوارزمية للجذر التربيعي لاي عدد صحيح N؛

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{N}{x_k})$$

حيث تمثل x_0 تخمين اولي للجذر N.

9. بين انه اذا طبقت الصيغة في السؤال السابق مرتين نحصل على

$$\sqrt{N} \simeq \frac{A+B}{4} + \frac{N}{A+B}$$

حيث $AB = N$.

10. للمعادلة

$$f(x)=e^{x}-3x^{2}$$

ثلاثة جذور، والصيغة المكافئة المباشرة هي:

$$x=\mp\sqrt{e^{x}/3}$$

بين انه عند البدء بـ $x_0 = 0$ فانها تقترب من الجذر القريب من 0.5- عن استخدام القيمة السالبة وتقترب من الجذر الذي قرب 1.0 عند استخدام القيمة الموجبة. ثم بين ان هذه الصيغة لا تقترب من الجذر الثالث الذي قرب 4.0 حتى في حالة البدء بنقطة قريبة جداً من الجذر.

اوجد صيغة تقترب للجذر القريب من 4.0.

11. بفرض ان الصيغتين:

$$1)\ x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{3}$$

$$2)\ x_{n+1}=3-\frac{2}{x_n}$$

تتقاربان، وضح انهما يعينان جذوراً مختلفة للمعادلة نفسها.

12. الحدودية التكعيبية $2x^3+4x^2-2x-5=0$ لها جذر قرب x=1. اوجد على الاقل ثلاث صيغ مكافئة تتقارب لهذا الجذر متبدئاً بالنقطة x0 = 1.0.

حل منظومة المعادلات الخطية

Solution of Linear Systems

الفصل الرابع

حل منظومة المعادلات الخطية

Solution of Linear Systems

مقدمة Introduction:

تنشأ منظومة المعادلات الخطية في كثير من المجالات العلمية تطبيقية كانت أو نظرية، ونخص بالذكر حل المعادلات التفاضلية الجزئية بالطرق العددية. حيث تتولد أنظمة كبيرة الحجم لا يمكن التعامل معها يدوياً بل لا بد من جهاز الحاسب.

ونظراً للعدد الهائل من العمليات الحسابية اللازمة لإجراء أية عملية جبرية فإن الناتج غالباً ما يكون محملاً بالخطأ.

في هذا الفصل نستعرض بعض الطرق المباشرة وبعض الطرق التكرارية.

4.1 مفاهيم عامة General Concepts:

نعرف المتجه (Vector) على أنه مجموعة إعداد مرتبة أفقياً (Row) أو عمودياً (Column). والمصفوفة (Matrix) هي مجموعة إعداد مرتبة بشكل مستطيل، وكل عدد يسمى عنصر أو مدخل ويرمز له بدليلين مثل a_{ij} حيث i تمثل رقم الصف و j تمثل رقم العمود.

$$\underset{\text{مصفوفة بحجم } m \times n}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}} , \underset{\text{متجه صف}}{[x_1, x_2, \cdots, x_n]} , \underset{\text{متجه عمود}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}$$

شكل (4.1)

تسمى المصفوفة التي كل عناصرها أصفاراً عدا القطر بمصفوفة قطرية أي $a_{ij}=0$ لكل $i=j$ أما في حالة كون $a_{ij}=0$ لكل $i>j$ تنتج مصفوفة مثلثية علوية وفي حالة $a_{ij}=0$ لكل $i<j$ تنتج مصفوفة مثلثية سفلية.

يقال للمصفوفة A أنها ذات هيمنة قطرية إذا كان

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{لكل } i$$

يقال عن مصفوفة A أنها مفردة (شاذة) (Singular) إذا كان $|A|=0$ حيث أن $|A|$ هو محدد A (Determinante)، ذلك يعني أنه لا توجد مصفوفة A^{-1} بحيث أن $A^{-1}A=I$ حيث A^{-1} هي معكوس A (Inverse of A) وأن I هي مصفوفة الوحدة (المصفوفة الذاتية) (Identity Matrix).

جمع مصفوفتين يجوز عندما تكونان بنفس الحجم، ضرب مصفوفتين يجوز عندما يكون عدد الأعمدة في المصفوفة اليسرى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة اليمنى مثلاً $A_{m\times n} \times B_{n\times l}=C_{m\times l}$. إن عملية الجمع على المصفوفات تبديلية بينما عملية الضرب ليست.

لتكن كل من A, B, C مصفوفة فإن:

$$|AB|=|A||B|$$

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

A/B غير معرف

سنركز اهتمامنا على المصفوفة المربعة، فبصورة عامة يكون للمعادلة.

$$Ax=b \qquad (1)$$

حلاً وحيداً إذا كانت A غير شاذة، حيث x متجه مجهول و b متجه معلوم.

يقال للمصفوفة A أنها متناظرة (Symmetric) إذا كان لكل j, i $a_{ij}=a_{ji}$.

يقال للقيمة العددية λ والمتجه المرافق لها x أنها قيمة ذاتية ومتجه ذاتي مرافق للمصفوفة A حيث:

$$Ax = \lambda x \qquad (2)$$

أي أن:

$$Ax - \lambda x = 0$$

أو

$$(A - \lambda I)x = 0$$

وبالتالي فإن:

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (3)$$

من هذه المعادلة نستخرج القيم الذاتية للمصفوفة A.

في حل المنظومات الخطية نحتاج في كثير من الأحيان إلى ما يسمى بالتحويلات الأولية وهي عبارة عن عمليات حسابية تجرى على المصفوفات لتغييرها إلى صورة بحيث يسهل علينا التعامل معها. ومن هذه التحويلات الابتدائية:

أ. ضرب أحد الصفوف في عدد معين، مثل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad , c = 3$$

بضرب c في الصف الأول ينتج:

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 17$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 51 = 3\,(17)$$

ب. ضرب أحد الصفوف في عدد ثم إضافته إلى صف آخر دون تغيير في الصف الأول، مثل، من المثال في الحالة أ - يكون:

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 15 & 8 \end{bmatrix}$$

حيث تم اضافة الصف الأول من B إلى الصف الثاني دون تغيير الصف الأول من المصفوفة الأصل A.

لاحظ أن:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 15 & 8 \end{vmatrix} = |D| = 17 = |A|$$

ج. تبديل صفين في مصفوفة، مثل:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن:

$$|A| = 17 = -|F| = 17$$

4.2 المنظومات الخطية Linear Systems

نرتب المعادلات الخطية بحيث يكون تسلسل المتغيرات هو نفسه في كل المعادلات، وتكتب الواحدة تحت الأخرى وبالشكل التالي:

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{mn} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{array} \tag{4}$$

حيث تحتوي m من المعادلات و n من المتغيرات $(x_1, \ldots, x_n)$. وتكتب هذه المنظومة بشكل مصفوفات ومتجهات كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{5}$$

وللسهولة نرمز لها بالرمز

$$Ax = b \tag{6}$$

حيث A هي مصفوفة المعاملات و x هو متجه المتغيرات وb هو متجه الجهة اليمنى وهو ثابت.

فإذا كان عدد المعادلات أكبر من عدد المتغيرات فلا يُوجد حل للمنظومة إلا إذا كانت المعادلات الإضافية مكافئة لمعادلات أخرى عندها يمكن الاستغناء عنها وإيجاد الحل:

مثلاً:

$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$3x_1 + 2x_2 = 1$$
$$5x_1 - 3x_2 = 2$$

وإذا كان عدد المعادلات أقل من عدد المتغيرات فيكون للمنظومة عدد كبير من الحلول مثل:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -5$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7$$

أما إذا كان عدد المعادلات يساوي عدد المتغيرات حيث تكون مصفوفة المعاملات مربعة فإن للمنظومة حل وحيد إذا كانت A غير شاذة.

على العموم فإن هناك أسلوبين لحل المنظومات الخطية أولاً الأسلوب المباشر وثانياً الأسلوب التكراري. وسنبدأ بطرق الأسلوب المباشر حيث تشمل:

1. طريقة كاوس للحذف.
2. طريق التحليل المثلثي.

أما الأسلوب التكراري أو (غير المباشر) فيشتمل على:

أ. طريقة جاكوبي.

ب. طريقة سيدال.

ج. طريقة فوق الاسترخاء (SOR).

وسنبدأ بالطرق المباشرة:

4.3 طريقة كاوس للحذف والتعويض التراجعي

Gaussian Elimination and Backword Substitution

فكرة هذه الطريقة تتلخص في تحويل مصفوفة المعاملات A من مصفوفة مربعة إلى مصفوفة مثلثية علوية حيث أن ذلك يسهل إيجاد الحل بدءاً من آخر معادلة صعوداً إلى أول معادلة كما في الصورة الآتية:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (7)$$

(a)

تتحول إلى:

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{bmatrix} \qquad (8)$$

(b)

وكما نلاحظ فإن التغير الذي يطرأ على المصفوفة A لتحويل عناصرها من a إلى a' يشتمل أيضاً متجه الجهة اليمنى $\underline{b}$.

إن عملية التحويل من مصفوفة مربعة إلى مصفوفة مثلثية تجري بفعل التحويلات الأولية ونستعرض ذلك بالمثال الآتي:

مثال (1):

لحل المنظومة الآتية:

$$E_1: x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$
$$E_3: 2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$E_3: 4x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

نجري العمليات الآتية:

ضرب المعادلة الأولى في (2-) وجمعها مع المعادلة الثانية:

$$E_2 \ -2E_1 \rightarrow E_2$$

ضرب المعادلة الأولى في (4-) وجمعها مع المعادلة الثالثة:

$$E_3 \ -4E_1 \rightarrow E_2$$

ينتج:

$$E_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$E_3 : 0 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$E_3 : 0 + 9x_2 - 5x_3 = -3$$

وبضرب المعادلة الثانية في (3-) وجمعها مع المعادلة الثانية ينتج:

$$E_3 \ -3E_2 \rightarrow E_3$$

$$E_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$E_3 : 0 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$E_3 : 0 + 0 - 2x_3 = -3$$

وبصورة المصفوفة يعني:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

الان نجري عملية التعويض التراجعي، فنبدأ من الأسفل، يكون من المعادلة الأخيرة:

$$-2\ x_3 = -3 \ \rightarrow \ x_3 = \frac{3}{2}$$

ومن المعادلة قبل الأخيرة:

$$3\ x_2 - x_3 \ = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

ومن المعادلة الاولى

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

في عملية الحذف نلاحظ أننا في الخطوة الأولى قمنا بتصفير عناصر العمود الأول وما تحت القطر وتم ذلك بضرب الصف الأول بعامل الضرب $m_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}}$.

ثم جمعنا الناتج الى الصف الثاني فيتصفر العنصر a_{21} . كذلك ضربنا الصف الأول بعامل الضرب $m_{31} = \frac{-a_{31}}{a_{11}}$ وأضفنا الناتج إلى الصف الثالث لأجل تصفير العنصر a_{31}.

في الخطوة الثانية قمنا بضرب الصف الثاني بعامل الضرب $m_{32} = \frac{-a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$

واضفنا الناتج إلى الصف الثالث فيتصفر العنصر $a_{32}^{(1)}$ حيث أن الدليل العلوي للعناصر $a_{ij}^{(1)}$ يشير إلى أن هذه العناصر قد تغيرت من الخطوة الأولى. كما ويجب أن نلاحظ أن عناصر المتجه الأيمن $\underline{b}$ عدا العنصر الأول قد تغيرت أيضاً بفعل هذه العمليات. ولذلك فغالباً ما نعامل المصفوفة A والمتجه $\underline{b}$ معاً بعد دمجهما بما يسمى المصفوفة الممتدة (Augmented matrix) فهي عبارة عن مصفوفة بحجم nxn+1.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix}$$

وعادة نكتب العناصر bi على انها a_{in+1} .

يمكن تلخيص الطريقة بالخوارزمية الآتية:

خوارزمية كاوس للحذف والتعويض التراجعي،

الإدخال:

1. عدد الصفوف = n.

2. العناصر a_{ij} ، $i=1,\dots,n$ ، $j=1,\dots,n+1$

أولاً: عملية الحذف

1. لكل $k = 1, \dots, n-1$
2. لكل $i = k+1, \dots, n$
3. $m_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$
4. $E_i = E_i - m_{ik} E_k$

انتهت عملية الحذف.

ثانياً: التعويض التراجعي

1. $x_n = a_{n,n+1}/a_{nn}$
2. لكل $i = n-1, \dots, 1$
3. $x_i = \left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right)/a_{ii}$

انتهت عملية التعويض التراجعي.

الإخراج: العناصر $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

4-5 طريقة كاوس جوردن Gauss – Jordan Method

من العنوان نفهم أن هذه الطريقة ما هي إلا امتداد لطريقة كاوس للحذف حيث هنا تتم عملية تصفير عناصر تحت القطر وفوق القطر بنفس الوقت لتعطي مجموعة معادلات قطرية ويكون المصفوفة الممتدة بالشكل:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & 0 & a_{2,n+1}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & a_{nn}^{(n)} & a_{n,n+1}^{(n)} \end{array}\right]$$

ويعطى بهذا الحل يكون

$$x_i = \frac{a_{in+1}^{(i)}}{a_{ii}^{(i)}}$$

وغالباً ما يصار إلى تقسيم كل صف، قبل تصفير العمود المناظر له، تقسيمه على العنصر القطري له $a_{ii}^{(i)}$ وبذلك تنتج مصفوفة معاملات ذاتية وذلك يؤدي إلى أن يصبح المتجه الأيمن هو متجه الحل.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & \vdots & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & x_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & 0 & \vdots & x_n \end{bmatrix}$$

مثال 2: [8]

نفرض لدينا المصفوفة المزادة (الممتدة).

$$[A:b] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & \vdots & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & \vdots & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

نلاحظ هنا العنصر $a_{11}^{(1)}$ قيمته صفر. ولا يمكن تقيسم العناصر التي تحته عليه لأجل تصفيرها لذا سنقوم بما يسمى الارتكاز الجزئي (المحورة الجزئية). (وهذا ما سنقوم بالتطرق إليه لاحقاً) أي أن نبادل الصف الأول مع أحد الصفوف وسنختار الرابع. وبعد القسمة على العنصر القطري الجديد وتصفير العمود الأول ينتج:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.16667 & -1 & -0.83335 & \vdots & 1 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & \vdots & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3334 & \vdots & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

في هذه المرة وبرغم ان العنصر $a_{22}^{(2)}$ ليس صفراً إلا أنه يفضل أن يكون العنصر الأكبر بالقيمة المطلقة في ذلك العمود، في هذا الموقع وبعد تقسيم ذلك الصف على العنصر القطري $a_{22}^{(2)}$ وتصفير عناصر ذلك العمود لحصل على ما يلي

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1.5000 & -1.2000 & \vdots & 1.4000 \\ 0 & 1 & 2.999 & 2.2000 & \vdots & -2.4000 \\ 0 & 0 & 15.000 & 12.400 & \vdots & -19.800 \\ 0 & 0 & -5.998 & -3.4000 & \vdots & 4.8000 \end{bmatrix}$$

وهكذا حتى نصل إلى النتيجة:

$$[I:x]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -0.49999 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1.0001 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0.33326 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & -1.9999 \end{bmatrix}$$

إذن يكون الحل (1.999 – و 0.3332 و 1.0001 و 0.49999 –) = x^* ذلك باستخدام التدوير لخمسة أرقام معنوية بعد كل عملية حسابية لتقريب الحل الحقيقي وهو $x^T=(-\frac{1}{2}\ ,\ 1\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ -2)$.

4.5 الارتكاز الجزئي (المحورة الجزئية) (Partial Pivoting)

لحد الآن الأمور تسير على ما يرام عدا ما صادفنا في المثال السابق عندما تصادف أن يكون العنصر القطري (العنصر الذي نعتمد عليه في تصفير العناصر التي تحته) أو ما يسمى بعنصر الارتكاز عندما يكون صفراً. عندها قمنا بعملية تبديل بين الصفوف. لكن قد نحتاج إلى تبديل الصفوف دون أن يكون عنصر الارتكاز صفراً.

مثال 3: [7]

لحل المنظومة

$$E_1 : 0.003000x_1 + 59.14x_2 = 59.17$$

$$E_2 : 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$$

باستخدام طريقة كاوس للحذف ولا ربعة أرقام معنوية. وحيث أن عنصر الارتكاز هو $a_{11}=0.003000$، نجد عامل الضرب m_{21} حيث:

$$m_{21}=\frac{5.291}{0.003000}=1763.6\bar{6}$$

وعليه فالناتج يدور إلى 1764 فلتصفير العنصر $a_{21}^{(1)}$ يكون:

$$E_2-m_{21}E_1\rightarrow E_2$$

وباستخدام التدوير نحصل على:

$$0.003000x_1+59.14x_2=59.17$$

$$-104300x_2=-104400$$

وباستخدام التعويض التراجعي فإن:

$$x_2=1.001$$

$$x_1=\frac{59.17-(59.14)(1.001)}{0.003000}=-10.00$$

علماً أن الحل الحقيقي هو $x_2=1$ و $x_1=10$!.

هذا الخطأ الكبير في الناتج كان بسبب محدودية عدد الأرقام المستخدمة خاصة وأن قيمة m_{21} هي السبب الأول في الخطأ.

إن هذا الإجراء (الارتكاز الجزئي) كنا قد اجريناه في مثال سابق أيضاً عندما كان يصادف أن يكون عنصر الارتكاز صفراً وطبعاً من السهولة اكتشاف ذلك على الحاسب من خلال العبارة:

$$\text{if}\quad a_{ii}=0$$

لكن المشكلة تكمن عندما لا يكون عنصر الارتكاز صفراً وإنما عدد صغير نسبة إلى بقية العناصر المراد تصفيرها، كيف يتم الكشف عنه؟

بما أن ذلك غير ممكن فإننا نختبر عنصر الارتكاز عند البدء بتصفير كل عمود. فإذا ظهر أن هناك عنصراً أكبر من عنصر الارتكاز بالقيمة المطلقة نقوم بعملية التبديل.

$$\text{if}\,|a_{ik}|>|a_{ii}|\qquad i<k\leq n$$

then $E_k \leftrightarrow E_i$

فعودة إلى مثال (2) وبعد إجراء عملية التبديل يصبح:

$E_1: 5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$

$E_2: 0.003000x_1 - 59.14x_2 = 59.17$

وأن عامل الضرب:

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = \frac{0.003000}{5.291} = 0.0005670$$

وحيث أن:

$(E_2 - m_{21}\ E_1) \rightarrow (E_2)$

ينتج:

$5.291x_1 - 6.130x_2 = 46.78$

$59.14x_2 = 59.14$

وباستخدام أربعة أرقام معنوية فقط نحصل على الناتج:

$x_2 = 1.000$

$x_1 = 10.00$

أما عملية تبديل الصفوف فإنها تجري باستخدام ما يسمى بالمؤشر:

$P(i) = i \qquad , i = 1,\ldots\ldots, n$

وفيما يلي خوارزمية كاوس للحذف مع الارتكاز الجزئي:

خوارزمية كاوس للحذف مع الارتكاز الجزئي:

لحل المنظومة الخطية $Ax = b$

إدخال: عدد n وعناصر المصفوفة الممتدة $[A:b] = a_{ij}$

$i = 1,\ldots,n \quad , \quad j = 1,\ldots, n+1$

الحذف:

1. لكل $i = 1,\ldots,n$ $\quad P(i) = i$
2. لكل $i = 1,\ldots,n$

نفرض ℓ هو رقم الصف بحيث:

$$|a(p(\ell),i)| = \max_{i \le j \le n} |a(p(j),i)|$$

3. نبادل الصفين i ، ℓ

$c = p(j)$
$p(i) = p(\ell)$
$p(\ell) = c$

4. لكل $j = i+1,\ldots,n$

$$m(p(j),i) = \frac{a(p(j),i)}{a(p(i),i)}$$

5. $Ep(j) = E\,p(j) - m(p(j),i)\,E\,p(i)$

التعويض التراجعي:

1. $x_n = a(p(n),n+1)/a(p(n),n)$

2. لكل $i = n-1,\ldots,1$

$$x_i = \frac{a(p(i),n+1) - \sum_{j=i+1}^{n} a(p(i),j)\,x_j}{a(p(i),i)}$$

الإخراج: اطبع $x_1,\ldots,x_n$

4.6 محدد ومعكوس المصفوفة Determinant & Inverse of a Matrix:

كما أن طريقة كاوس للحذف تسهل عملية إيجاد الحل للمنظومة الخطية، كذلك فهي طريقة مختصرة لإيجاد محدد أو معكوس مصفوفة.

حيث أن محدد مصفوفة مثلثية هو حاصل ضرب عناصر القطر فإنه بعد تصفير المثلث السفلي للمصفوفة A فإننا لجد المحدد مع الأخذ بالاعتبار عمليات تبديل المصفوفة ذلك أن كل عملية تبديل بين صفين تقلب إشارة المحدد لذا فإن:

$$|A| = (-1)^K |B| \qquad (9)$$

حيث أن B هي المصفوفة المثلثية الناتجة من تطبيق طريقة كاوس على A ، وأن k هو عدد التبديلات بين الصفوف.

$$\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}\right| = (-1)^k \left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}^{(n-1)}\right|$$

مثال (4): [7]

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

لتصفير العمود الأول تحت القطر نضع $(E_2 - 2E_1) \rightarrow (E_2)$، $(E_3 + E_1) \rightarrow (E_3)$، $(E_4 - 3E_1) \rightarrow (E_4)$ فينتج:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

ثم لتصفير العمود الثاني تحت القطر نضع $(E_3 + 3E_2) \rightarrow (E_3)$، $(E_4 - 4E_2) \rightarrow (E_4)$ فينتج:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

هنا نجد أن عنصر الارتكاز هو صفراً لذا نحتاج إلى تبديل الصفين الثالث والرابع فينتج:

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

وحيث أن المصفوفة الناتجة مثلثية فيكون المحدد:

$$\left|A^{(3)}\right| = (1)(-1)(3)(-13) = 39$$

وحيث ان هناك عملية تبديل واحدة فالمحدد للمصفوفة الاصل هو:

$$-\left|A^{(3)}\right| = |A| = -39$$

فكرة: لماذا لا نستخدم طريقة كاوس جوردن لإيجاد المحدد؟

لإيجاد المعكوس نستخدم المعادلة:

$$AX = I \tag{10}$$

ونجد الحل X والذي يمثل A^{-1} ذلك باستخدام المصفوفة الممتدة:

$$[A : I]$$

فبالنسبة لطريقة كاوس للحذف لمحول المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية علوية فينتج:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \vdots \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & I \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \overset{(n-1)}{a_{11}} & \cdots & \overset{(n-1)}{a_{1n}} & \vdots \\ 0 & & & \tilde{I} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & \overset{(n-1)}{a_{nn}} & \vdots \end{bmatrix}$$

وبإجراء التعويض التراجعي لكل عمود من اعمدة $\tilde{I}$ أي أن نجري التعويض التراجعي على كل من:

$$\overset{(n-1)}{A}\, x_1 = \underline{\tilde{e}}_1 ,$$

$$\overset{(n-1)}{A}\, x_2 = \underline{\tilde{e}}_2 ,$$

$$\vdots$$

$$\overset{(n-1)}{A}\, x_n = \underline{\tilde{e}}_n ,$$

حيث $\bar{e}_i$ هي العمود i من المصفوفة $\bar{I}$؛ نحصل على أعمدة المصفوفة المطلوبة، $x_1, x_2, \ldots, x_n$ لتكوّن A^{-1}.

أما في حالة استخدام طريقة كاوس جوردن فكما حصل في حل المنظومة الخطية حيث:

$$[A:b] \Rightarrow [I:x]$$

فإن ما يحصل في إيجاد المعكوس هو:

$$[A:I] \Rightarrow [I:A^{-1}]$$

4.7 حساب الكلفة Complexity Computation

لأجل معرفة كمية الحسابات اللازمة لإجراء مهمة ما، نقوم بحساب عدد العمليات الحسابية الكلي لتلك المهمة. ذلك لأجل المقارنة مع طرق أخرى أو خوارزميات أخرى. أو لحساب الوقت الذي تستغرقه المهة من خلال بعض الحقائق العلمية. فمثلاً عملية الضرب تستغرق 2.5 مرة الوقت الذي تستغرقه عملية الجمع على الحاسب.

فبالعودة إلى خوارزمية كاوس للحذف والتعويض التراجعي نجد مما يلي عدد العمليات الحسابية:

في الخطوة 4: $n-i$ قسمة

في الخطوة 5:

$(n-i)(n-i+1)$ ضرب

$(n-i)(n-i+1)$, طرح

ذلك لكل $i = 1, \ldots, n-1$

فيكون مجموع عمليات الضرب والقسمة هو:

$(n-i)+(n-i)(n-i+1)=(n-i)(n-i+2)$، لكل i

ومجموع عمليات الطرح والجمع هو:

$(n-i)(n-i+1)$، لكل i

وعليه يمكن وضع مجمل العمليات كما يلي:

أ. للضرب والقسمة

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+2)$$
$$= (n^2+2n)\sum_{i=1}^{n-1}1 \;-2(n+1)\sum_{i=1}^{n-1}i + \sum_{i=1}^{n-1}i^2$$
$$=(n^2+2n)(n-1)-2(n+1)\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

ب. للجمع والطرح:

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(n-i+1)$$
$$= (n^2+2n)\sum_{i=1}^{n-1}1 \;-(2n+1)\sum_{i=1}^{n-1}i + \sum_{i=1}^{n-1}i^2$$
$$=(n^2+n)(n-1)+(2n+1)\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{n^3+n}{6}$$

أما في عملية التعويض التراجعي، ففي الخطوة 1 هناك عملية قسمة واحد وفي الخطوة 2 هناك $(n-i)$ عملية ضرب و $(n-i+1)$ عملية جمع لكل $\sum$ وعملية طرح واحدة وعملية قسمة واحدة.

إذن يكون عدد العمليات في التعويض التراجعي كما يلي:

- الضرب والقسمة:

$$1+\sum_{i=1}^{n-1}((n-i)+1)$$
$$=\frac{n^2+n}{2}$$

- للجمع والطرح:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left((n-i)+1\right)$$

$$=\frac{n^2-n}{2}$$

وعليه يكون لعمليتي الحذف والتعويض التراجعي:

- ضرب وقسمة:

$$\frac{n^3+3n^2-5n}{6}+\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^3+3n^2-n}{3}$$

- جمع وطرح:

$$\frac{n^3-n}{3}+\frac{n^2-n}{2}=\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$$

يظهر لنا أن عدد العمليات الحسابية يتناسب مع n^3 لكلا النوعين ضرب وقسمة جمع وطرح وكما موضع في الجدول التالي:

جدول (1)

n	عدد عمليات الضرب والقسمة	عدد عمليات الجمع والطرح
3	17	11
16	430	375
50	441150	42875
100	343300	3381850

أما بالنسبة لطريقة كاوس جوردن، فإن عدد العمليات الحسابية يتلخص بما يلي:

- الضرب والقسمة : $\frac{n^3}{2}+n^2-\frac{n}{2}$

- للجمع والطرح : $\frac{n^3}{2}-\frac{n}{2}$

ولأجل المقارنة مع طريقة كاوس للحذف نستعرض الجدول الآتي والذي يخص طريقة كاوس جوردن.

جدول (2)

n	عدد عمليات الضرب والقسمة	عدد عمليات الجمع والطرح
3	21	12
10	595	495
50	64975	62475
100	509950	499950

4.8 طريقة التحليل المثلثي Triangular Decomposition

في طريقة كاوس للحذف لحل المنظومة الخطية:

$$Ax = b \qquad (11)$$

حولنا المصفوفة A من مربعة إلى مثلثية ثم أجرينا عملية التعويض التراجعي لإيجاد الحل، ولو فرضنا أن بعد فترة معينة ثم تغيير متجه الجهة اليمنى فقط فإننا نحتاج إلى إجراء نفس العمليات التي أجريت سابقاً على المصفوفة A والمتجه b ولأننا لم نحتفظ بهذه الإجراءات فإننا سنضطر إلى إعادتها حتى على المصفوفةA، وقد يتكرر ذلك أكثر من مرة ولأجل خزن هذا الإجراء نعرض طريقة التحليل المثلثي.

في هذه الطريقة نحلل مصفوفة المعاملات A إلى حاصل ضرب مصفوفتين مثلثين سفلية وعلوية فتصبح المعادلة (11) بالصورة:

$$LUx = b \qquad (12)$$

حيث L تشير إلى المصفوفة المثلثية السفلى، U إلى المثلثية العليا ولذلك يطلق على هذه الطريقة اسم طريقة LU مع التركيز على أن تكون عناصر القطر لاحدى المصفوفتين هي الوحدة.

بصورة مصفوفات تكون المعادلة (12) بالشكل:

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & \ell_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} \cdots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

الفكرة هي أن نستفيد من الصورة المثلثية للمصفوفات فهي تسهل عملية إيجاد الحل كما رأينا في طريقة كاوس للحذف. وعليه نضع.

$$y = Ux \quad (14)$$

تصبح المعادلة (12)

$$Ly = b \quad (15)$$

نحل بالنسبة إلى y . وعودة إلى المعادلة (14) حيث:

$$Ux = y$$

ونحلها بالنسبة إلى x كون y معلومة. بهذا نكون قد أجرينا عملية تعويض مباشرة في المعادلة (15) وعملية تعويض تراجعي في المعادلة (14)

نعم الحلقة المفقودة هي كيفية الحصول على عناصر L وU. لنضع أمامنا صورة المصفوفات للمعادلة.

$$L\,U = A \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \ell_{n1} & \dots & \dots & \dots & \ell_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & 0 & & \ddots & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

الخطة العامة هي أن نجد عمود من L ثم صف من U بالتبادل وابتداءاً من العمود الأول والصف الأول.

فلإيجاد عناصر العمود الأول من L نضرب صفوف L بالعمود الأول من U، فينتج،

$$\left.\begin{matrix} \ell_{11}=a_{11} \\ \ell_{21}=a_{21} \\ \vdots \\ \ell_{n1}=a_{n1} \end{matrix}\right\} \quad \ell_{i1}=a_{i1} \qquad , i=1,\ldots,n \qquad (18)$$

ثم نجد عناصر الصف الأول من U بضرب الصف الأول من L بأعمدة U بدءاً من العمود الثاني فينتج،

$$\left.\begin{matrix} \ell_{11}u_{12}=a_{12} \rightarrow u_{12}={a_{12}}/{\ell_{11}} \\ \ell_{11}u_{13}=a_{13} \rightarrow u_{13}={a_{13}}/{\ell_{11}} \\ \vdots \\ \ell_{11}u_{1n}=a_{1n} \rightarrow u_{1n}={a_{1n}}/{\ell_{11}} \end{matrix}\right\} u_{1j}=\frac{a_{1j}}{\ell_{11}} \qquad , j=2,\ldots,n \qquad (19)$$

ولأجل إيجاد عناصر العمود الثاني من L نضرب صفوف L (بدءاً من الصف الثاني) بالعمود الثاني من U فينتج،

$$\left.\begin{matrix} \ell_{21}u_{12}+\ell_{22}=a_{22} \rightarrow \ell_{22}=a_{22}-\ell_{21}u_{12} \\ \ell_{31}u_{12}+\ell_{32}=a_{32} \rightarrow \ell_{32}=a_{32}-\ell_{31}u_{12} \\ \vdots \\ \ell_{n1}u_{12}+\ell_{n2}=a_{n2} \rightarrow \ell_{n2}=a_{n2}-\ell_{n1}u_{12} \end{matrix}\right\} \ell_{i2}=a_{i2}-\ell_{i1}u_{12} \quad i=2,\ldots,n \qquad (20)$$

أما لإيجاد عناصر الصف الثاني من U فإننا نضرب الصف الثاني من L بأعمدة U بدءاً من العمود الثالث فيكون،

$$\ell_{21}u_{13}+\ell_{22}u_{23}=a_{23}\rightarrow u_{23}=(a_{23}-\ell_{21}u_{13})/\ell_{22}$$

$$\ell_{21}u_{14}+\ell_{22}u_{24}=a_{24}\rightarrow u_{24}=(a_{24}-\ell_{21}u_{14})/\ell_{22}$$

$$\vdots$$

$$\ell_{21}u_{1n}+\ell_{22}u_{2n}=a_{2n}\rightarrow u_{2n}=(a_{2n}-\ell_{21}u_{1n})/\ell_{22}$$

بصورة عامة فأن:

$$u_{2j}=(a_{2j}-\ell_{21}u_{1j})/\ell_{22}\quad ,\ j=3,\ldots,n \tag{21}$$

وعلى نفس المنوال نستخرج عناصر كلا المصفوفتين L و U وفيما يلي خوارزمية التحليل المثلثي LU لمصفوفة A بحجم $n\times n$.

خوارزمية التحليل المثلثي LU.

1. لكل $i = 1,\ldots, n$
2. $\ell(i,1) = a(i,1)$ انتهى i
3. لكل $j = 1, \ldots,n$
   $u_{(1,j)} = a_{(1,j)} / \ell_{(1,1)}$ انتهى j
4. لكل $j = 2,\ldots, n$
5. لكل $i = j\ldots,n$
6. لكل $k = 1,\ldots, j-1$
7. $S_1 = S_1 + \ell(i,k) * u(k,j)$ انتهى k
8. $\ell(i,j) = a(i,j) - s_1$ انتهى i
9. $u(j,j) = 1$
10. لكل $i = j+1, \ldots ,n$
11. لكل $k = 1,\ldots, j-1$
12. $S_2 = S_2 + \ell(j,k) * u(k,j)$ انتهى k
13. $u(j,i) = (a(j,i) - S_2)/\ell(i,j)$ انتهى j ، انتهى i

مثال 5 : [8]

لحل المنظومة:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

نقوم بتحليل مصفوفة المعاملات A فنجد

$$\ell_{11}=3, \ell_{21}=1, \ell_{31}=2,$$

$$u_{12}=-\tfrac{1}{3}, u_{13}=\tfrac{2}{3},$$

$$\ell_{22}=2-(1)(-\tfrac{1}{3})=\tfrac{7}{3}, \ell_{32}=-2-(2)(-1/3)=-4/3,$$

$$u_{23}=\frac{3-(1)(2/3)}{7/3}=1$$

$$\ell_{33}=-1-2(2/3)-(-4/3)(1)=-1$$

إذن يكون

$$L=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \tfrac{7}{3} & 0 \\ 2 & -\tfrac{4}{3} & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} 1 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبصورة مدمجة يكون

$$L, U=\begin{bmatrix} 3 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} \\ 1 & \tfrac{7}{3} & 1 \\ 2 & -\tfrac{4}{3} & -1 \end{bmatrix}$$

أما الحل فاولاً نضع

$$Ly=b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7/3 & 0 \\ 2 & -4/3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض المباشر نجد أن $y_1 = 4$, $y_2 = 3$, $y_3 = 2$

الآن نحل $Ux = y$ بالنسبة إلى x:

أي

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وبالتعويض التراجعي ينتج $x_3 = 2$, $x_2 = 1$, $x_1 = 3$.

الصورة السابقة للتحليل تسمى طريقة دولتل (Doolittle) وهناك صورة أخرى وهي ان تكون عناصر قطر المصفوفة L هي عناصر الوحدة فتكون $A = LU$ بالشكل.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \ell_{n1} & \ldots & \ell_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \tag{23}$$

وتدعى هذه الصورة بطريقة كراوت Crout

ان عملية الارتكاز الجزئي في طريق LU يمكن ان تجري لكنها اكثر تعقيداً مما هي عليه في طريقة كاوس للحذف.

مثال 5:

لتكن

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطة العامة المعتمدة هي أنه بعد إيجاد أي عمود من L نقوم بتبديل الصفوف للمصفوفتين L و A ذلك اعتمادا على العنصر الموجود في القطر الرئيسي للمصفوفة L. أي أن نضع العنصر الأكبر في العمود الجديد كعنصر قطري في L.

نسجل ترتيب الصفوف في المتجه $T = (1,2,3)$

وهذا يمثل الترتيب الأصلي. يكون العمود الأول من L هو:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(باعتماد أسلوب دولتل) لذا نحتاج أن نبادل الصفين الأول مع الثالث فيصبح المتجه T بالشكل $T = (3,2,1)$. ونجد الصف الأول من U وهو $\begin{bmatrix} 1, 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ثم نجد العمود الثاني من L وهو:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن نحتاج أن نبادل الصفين الثاني مع الثالث في كل من L و A فيصبح $T = (3,1,2)$.

ونجد الصف الثاني من U وهو $\begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ واخيراً نحسب ℓ_{33} فيكون $-\frac{1}{3}$، اذن تكون الصورة النهائية حيث $T = (3,1,2)$ هي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A = LU = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإذا كان $b^T = [5 \;\; -1 \;\; -2]$ حيث $Ax = b$ فإننا نرتب عناصر B بحسب الترتيب المعطي في T فيكون $b^T = [-2 \;\; 5 \;\; -1]$ ولحل المنظومة كما في السابق بتعويض تقدمي ثم بتعويض تراجعي.

$$Ly = b$$
$$Ux = y$$

ويعطي $x^T = [-1, 2, 1]$.

4.9 وحدانية التحليل المثلثي Uniqueness Of LU Decomposition

يمكن أن يكون هناك أكثر من زوج من المصفوفات المثلثية (علوية سفلية) تكون تحليلاً للمصفوفة A. إلا أنه يوجد زوج واحد (من كل من صيغتي دولتل أو كراوت) يكون فيه إحدى المصفوفتين ذات قطر واحدي (أي عناصر قطرها الوحدة الواحدة).

نفرض أن كل من $L_1 U_1$، $L_2 U_2$ تحليل مثلثي للمصفوفة A بحيث أن إما كل من $U_2 U_1$ لها قطر واحدي أو أن كل من L_1, L_2 لها قطر واحدي.

$$L_1 U_1 = A = L_2 U_2$$

ومنها فإن

$$L_2^{-1} L_1 U_1 U_1^{-1} = L_2^{-1} L_2 U_2 U_1^{-1}$$

او

$$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} \qquad (24)$$

وحيث أن معكوس مصفوفة مثلثية هو مصفوفة مثلثية من نفس النوع وأن حاصل ضرب مصفوفتين مثلثتين من نفس النوع هو مصفوفة مثلثية من نفس النوع. فإن جهة اليسار في (24) هي مصفوفة مثلثية سفلية وجهة اليمين هي مصفوفة مثلثية علوية.

وهذا لا يمكن إلا إذا كانت المصفوفتين اليمين واليسار هي مصفوفات قطرية متساوية، D.

الآن نفرض ان المصفوفتان L_1, L_2 لهما أقطار واحدية. واضح أن :

$$L_1 = L_2 = D$$

أن العناصر القطرية للمصفوفة L_2 لا بد أن تكون هي نفسها العناصر القطرية لمصفوفة D وهي بالتأكيد مساوية للعناصر القطرية للمصفوفة L_1 .

$\therefore$ D هي مصفوفة الوحدة

$\therefore$ $L_1 = L_2$ و $U_1 = U_2$

4.1(العلاقة بين طريقة كاوس للحذف والتحليل المثلثي LU

إذا دققنا النظر فيما يحدث للمصفوفة A عند تصفير العناصر تحت القطرية طريقة كاوس للحذف نجد ما يلي، عند تصفير العمود الأول نستخدم مصفوفة لوحدة ذات عمود أول يحمل عوامل الضرب المستخدمة في التصفير.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & \ddots & & \\ m_{31} & & & \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

حيث

$$i = 2, \ldots, n \qquad , \ m_{i1} = -\frac{ai1}{a_{11}}$$

لنرمز لذلك بالرمز

$$L_1 A = A^{(1)} \qquad (26)$$

ولتصفير العمود الثاني من A^1 نضرب A^1 بـ L_2 حيث :

$$L_2 A^{(1)} = A^{(2)} \qquad (27)$$

وبصورة مصفوفات:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{32} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \\ 0 & m_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}^{(1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_{33} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}^{(2)}$$

وهكذا حتى تصفير العمود قبل الأخير فيكون

$$L_{n-1} A^{(n-2)} = A^{(n-1)} \qquad (28)$$

وبصورة تفصيلية

$$L_{n-1}\ L_{n-2}\dots L_1 A = A^{(n-1)} \quad (29)$$

واضح أن A^{n-1} هي المصفوفة المثلثية العلوية الناتجة عن تصفير المثلث السفلي للمصفوفة A.

وبوضع

$$L_{n-1} L_{n-2}\dots L_1 = \tilde{L}$$

و

$$A^{(n-1)} = U$$

فإن (29) تصبح

$$\tilde{L}\ A = U$$

يعني ان

$$A = (\tilde{L})^{-1}\ U$$

فاذا وضعنا

$$\tilde{L}^{-1} = L$$

فان

$$A = LU$$

إن المصفوفة L هي مصفوفة مثلثية سفلية ذلك لأن

$$L = (\tilde{L})^{-1}$$

$$= (L_{n-1}\ L_{n-2}\dots L_1)^{-1}$$

$$= L_1^{-1}\ L_2^{-1}\dots L_{n-1}^{-1}$$

وبما أن معكوس مصفوفة مثلثية سفلية هي مثلثية سفلية وحاصل ضرب مصفوفتين مثلثية سفلية، هي مثلثية سفلية فإن L تكون مثلثية سفلية.

4.11 محدد ومعكوس المصفوفة

Determinante & Inverse of a Matrix

معروف أن

$$|A|=|L||U|$$

إذن يكون محدد المصفوفة A هو محدد U أو محدد L حيث أن محدد إحداهما هو الواحد. نذكر بأننا عند إجراء تبديل صفوف خلال التحليل فلا بد من حفظ عدد التبديلات لأجل تعين إشارة المحدد.

لإيجاد معكوس A فإننا نستفيد من خاصية التحليل المثلثي في قابلية تغير المتجه b بدون إجراء التحليل مرات أخرى. حيث أن:

$$A X = I \tag{30}$$

وبحلها بالنسبة إلى X نحصل على A^{-1}

نكتب (30) بالصورة:

$$LUX = I \tag{31}$$

نضع

$$UX = Y \tag{32}$$

فيكون

$$LY= I \tag{33}$$

نحل المعادلة (33) عموداً بعد الآخر أي:

$$i = 1, ..., n \quad , \quad Ly_i = e_i \tag{34}$$

حيث $e_i|_{i=1}^{n}$ هي أعمدة I و $y_i|_{i=1}^{n}$ هي اعمدة Y.

ونحل (32) عموداً بعد الآخر كذلك، اي:

$$i = 1, ..., n \quad , \quad Ux_i = y_i \tag{35}$$

حيث $x_i|_{i=1}^{n}$ هي اعمدة X.

مثال 6:

لإيجاد معكوس A.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

نحلل A.

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

نضع

$$Ly_1 = e_1$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\ y_{21}\\ y_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y_{11}=1 \quad , y_{21}=-2 \quad , y_{31}=2$$

ومن

$$Ly_2 = e_2$$

نحصل على:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\ y_{21}\\ y_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$y_{12}=0 \quad , y_{22}=1 \quad , y_{32}=-\frac{1}{2}$$

ومن

$$Ly_3 = e_3$$

نحصل على:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{13}\\ y_{23}\\ y_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$y_{13}=0 \quad , y_{23}=0 \quad , y_{33}=1$$

فتكون

$$Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 2 & -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$$

ثم تأتي المرحلة الثانية:

$$UX = Y$$

وبوضع

$$U_{X1} = y_1$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ x_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ 2\end{bmatrix}$$

نجد ان

$$x_{31} = 4 \quad , x_{21} = 3 \quad , x_{11} = -9$$

وبوضع

$$Ux_2 = y_2$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\ x_{22}\\ x_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$x_{32} = -1 \quad , x_{22} = -1 \quad , x_{12} = 3$$

وبوضع

$$U_{x3} = y_3$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{13}\\ x_{23}\\ x_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

نجد ان

$$x_{33} = 2 \,,\ x_{23} = 1 \,,\ x_{13} = -4$$

إذن يكون:

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} -9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.12 الطرق التكرارية لحل المنظومة الخطية

Iterative Methods for Solving Linear Systems

في هذه المرة نجزئ مصفوفة المعاملات A(*) إلى ثلاثة أجزاء والهدف منها هو تسهيل عملية إيجاد الحل، لذا تكون التجزئة بحيث ينتج شكل مصفوفة سهلة الحل،لكن طبعاً أن يحقق التقارب إلى الحل الحقيقي. تستخدم الطرق التكرارية غالباً في حل المنظومات كبيرة الحجم والتي فيها تكون مصفوفة المعاملات كثيرة الاصفار وذلك ينتج عن الحلول العددية لمسائل القيم الحدية والمعادلات التفاضلية الجزئية.

اولاً: طريقة جاكوبي Jocobi Method:

هنا نجزئ A إلى مصفوفة قطرية D ومصفوفة مثلثية سفلى بدون قطر، L، ومصفوفة مثلثية عليا بدون قطر،U.

$$A = D + L + U \qquad (36)$$

وبصورة مصفوفات تكون:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & a_{nn} 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (37)$$

فلحل المنظومة $Ax = b$ نكتب

(*) هناك طرق مختلفة لتجزئة A لكننا هنا نقتصر على التجزئة المذكورة.

$$(D + L + U)\, x = b \tag{38}$$

وتحولها إلى

$$Dx = b - Lx - Ux \tag{39}$$

هنا نعطي قيمة تخمينية للمتجه $x^{(k)}$ في جهة اليمين لنحصل.

على قيمة جديدة في جهة اليسار وعليه نكتب (39) بالصورة التكرارية.

$$x^{(k+1)} = D^{-1} b = D^{-1} (L + U)\, x^{(k)} \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{40}$$

وهذا تترجم إلى ما يسمى بطريقة جاكوبي بالصورة:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{41}$$

هذه العملية تتكرر حتى يتحقق الشرط.

$$\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon \tag{42}$$

لكل i، حيث ε هي درجة السماح المعطاة.

مثال (7): [2]

حل المنظومة الاتية بطريقة جاكوبي

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned} \tag{43}$$

بالترتيب حسب طريقة جاكوبي تعطي

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(6 - 2x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{6}(4 - x_1^{(k)} + 3x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}(7 - 2x_1^{(k)} - x_2^{(k)}) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

وبدءاً بالمتجه التخميني $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

فاننا نحصل على التكرارات المبينة في جدول (3)

وقد توقفت التكرارات عند تحقق الشرط.

$$\max\left|x_i^{(k-1)} - x_i^{(k)}\right| \le 0.005$$

جدول (3)

K	$x_1^{(K)}$	$x_2^{(K)}$	$x_3^{(K)}$
0	0	0	0
1	1.200	0.667	1.750
2	1.283	1.342	0.983
3	0.860	0.944	0.773
4	0.977	0.910	1.084
5	1.053	1.046	1.034
6	0.988	1.008	0.962
7	0.989	0.983	1.004
8	1.008	1.004	1.010
9	1.000	1.004	0.995
10	0.997	0.998	0.999
11	1.001	1.00	1.002

لنقم بتبديل المعادلتين الأولى والثانية كل مكان الأخرى ونرى ماذا يحدث.

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 7 \end{aligned} \qquad (45)$$

وبترتيب المنظومة حسب طريقة جاكوبي وإجراء التكرارات نحصل على النتائج من جدول (4).

جدول (4)

K	$x_1^{(K)}$	$x_2^{(K)}$	$x_3^{(K)}$
0	0	0	0
1	4.000	3.000	1.750
2	- 8.750	- 6.125	-1.000
3	73.750	- 24.375	7.656
4	- 119.282	- 87.547	- 23.219
5	459.625	289.625	83.278

واضح أن النتائج متباعدة!. لابد أن يكون هناك شرط معين يجب ان يتحقق لأجل التقارب. لاحظ عناصر القطر بالنسبة للعناصر الباقية!

ثانياً: طريقة سيدال Seidel Method:

لو عدنا إلى المثال (7) وعند المعادلة (44) نجد انا عند ايجاد $x_2^{(k+1)}$ استخدمنا $x_1^{(k)}$ و $x_3^{(k)}$، اما سيدال فقد اقترح ان نستفيد من القيمة الجديدة لـ x_1 وهي $x_1^{(k+1)}$، أي اقترح أن تكون المعادلة (44) بالصورة

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{5}(6-2x^{(k)}+x_3^{k}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{6}(4-2x_1^{(k+1)}+3x_3^{k}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{4}(7-2x_1^{(k+1)}-x_2^{(k+1)}) \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

لاحظ الدليل العلوي.

إن المنظومة $Ax = b$ وبعد تجزئة A إلى D, U, L ستكون:

$$(L + D + U)\,x = b \tag{47}$$

او

$$(L + D)\,x = b - U_x \tag{48}$$

وبالصورة التكرارية فان

$$(L + D)\,x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)} \tag{49}$$

∴ تكون صيغة سيدال التكرارية بالشكل

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(K+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\,x_j^{(k)}\right) \tag{50}$$

واعادة حل المثال (7) بطريقة سيدال يتولد الجدول الآتي:

جدول (5)

K	$x_1^{(K)}$	$x_2^{(K)}$	$x_3^{(K)}$
0	0	0	0
1	1.200	0.467	1.033
2	1.220	0.980	0.895
3	0.987	0.950	1.019
4	1.024	1.006	0.987
5	0.995	0.994	1.004
6	1.003	1.002	0.998
7	0.999	0.999	1.001

اما لو طبقنا طريقة سيدال على المجموعة (45) فاننا نحصل على القيم كما في الجدول (6).

جدول (6)

K	$x_1^{(K)}$	$x_2^{(K)}$	$x_3^{(K)}$
0	0	0	0
1	4.000	- 7.000	1.500
2	50.500	- 122.50	7.125
3	760.375	-1894.375	95.156

من المثير أن نلاحظ أن مقترح سيدال هو تسريع للوصول إلى النتائج سواء كان تقارباً أو تباعداً. إذا إن في حالة التقارب تكون $x_1^{(K+1)}$ اقرب إلى الحل من $x_1^{(k)}$ وهذا ما يدفع $x_2^{(K+1)}$ إلى التقرب أكثر إلى الحل وكذلك ما يحدث لـ $x_3^{(k+1)}$ فعند استخدام القيم $x_2^{(k+1)}, x_1^{(k+1)}$ فكلاهما أقرب للحل $x_1^{(k)}$ ، $x_2^{(K)}$ وهذا ما يدفع $x_3^{(k+1)}$ أكثر للحل. أما في حالة التباعد فإن $x_1^{(K+1)}$ تكون أبعد عن الحل وعليه فإن $x_2^{(K+1)}$ تبتعد أسرع مما لو استعملنا $x_1^{(K)}$ وهكذا.

إن صيغة التوقف المستخدمة في الأمثلة السابقة هي واحد من عدة صيغ وأن ذلك يعتمد على المقياس المستخدم للمتجهات.

تعريف: مقياس متجه هو دالة $\|\cdot\|$ منطلقها مجموعة المتجهات ذات n من المركبات في R_n ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية R ولها الخواص التالية:

1. $\|x\| \geq 0$ لكل $x \in, R^n$
2. $\|x\| = 0$ إذا فقط إذا كان $x = (0,0,\ldots,0)^t$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ لكل $x \in R^n, \alpha \in R$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ لكل $x, y R^n$

ومن المقاييس المستخدمة:

1. L_2 ويعرف بأنه:

$$\|X\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2}$$

ويسمى أيضاً المقياس الاقليدي.

2. L_∞ ويعرف بأنه:

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

3. L_1 ويعرف بأنه $\|X\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

إن التوقف عن التكرار يحدث عندما يصبح الفرق بين المتجه $X^{(k+1)}$ المتجه $X^{(k)}$ أقل من قيمة مسموح بها ε. وبهذا يمكن استخدام الصيغ.

1. $\|X^{(K+1)} - X^{(K)}\|_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|^2\right\}^{1/2}$
2. $\|X^{(K+1)} - X^{(k)}\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}|$

كذلك بالإمكان استخدام الصيغة.

$$\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|}{\|X^{(k)}\|}$$

خوارزمية جاكوبي لحل المنظومة $Ax = b$

1. إدخال عدد المعادلات n ، ومدخلات A، aij، $1 \le i, j \le n$ والجهة اليمنى bi، $1 \le i \le n$ والتخمين الأولي للمتجه X ، XO_i، $1 \le i \le n$ والخطأ المسموح بـه ε، والعدد الأكبر المسموح به من التكرارات N.
2. $k = 0$
3. ما دامت $k \le N$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij}\, xo_j}{a_{ij}}, i \ne j \qquad , \; i = 1, \ldots, n$$

4. إذا كان $\|X - XO\| < \varepsilon$

   اخراج x_i

   توقف

   وإلا.
5. $k = k + 1$
6. $xo_i = x_i \quad i = 1, \ldots, n$
7. في حالة $k > N$ توقف.

في خوارزمية سيدال فإن الخطوة 3 فقط تتغير إلى الشكل الآتي:

3. ما دامت $k \le N$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, xo_j}{a_{ii}} \qquad , i = 1, \ldots, n$$

4.13 شروط التقارب Convergence Conditions

لأجل ان نتعرف على أسباب تقارب أو عدم تقارب العملية التكرارية لكل من طريقتي جاكوبي وسيدال نجزئ مصفوفة المعاملات في المنظومة الخطية.

$$Ax = b$$

نضع

$$A = M + N$$

فيكون

$$x = M^{-1}(b - Nx) \qquad (51)$$

فبوجود x على جهتي اليمين واليسار يمكن أن نعطي قيم تخمينية لجهة اليمين لنستخرج قيم جديدة على جهة اليسار فتكون الصيغة التكرارية.

$$x^{(K+1)} = M^{-1}(b - N\ x^{(K)}) \qquad (52)$$

فبطرح (52) من (51) ينتج:-

$$e^{(K+1)} = -\ M^{-1} N e^{(K)} \qquad (53)$$

حيث:

$$e^{(k)} = x - x^{(k)}$$

أن المصفوفة $- M^{-1} N$ تسمى مصفوفة التقريب (أو مصفوفة التكرارات) Iteration Matrix، وهي التي تحدد تزايد $e^{(k+1)}$ عن $e^{(k)}$ أو تناقصه. وبما اننا نروم تناقص $e^{(k+1)}$ بزيادة k، أي ان المطلوب أن:

$$e^{(k)} \rightarrow 0 \quad \text{عندما} \quad K \rightarrow \infty \qquad (54)$$

أن المصفوفة $- M^{-1} N$ لا بد أن تمتلك خاصية بحيث تحقق (54)

وبما أن العلاقة (53) تربط بين متجه $e^{(k)}$ ومصفوفة التكرارات $- M^{-1} N$، فلا بد من إيجاد طريقة مشتركة لقياس المتجه والمصفوفة. ونحتاج الآن إلى إستعراض أنواع مقاييس المصفوفات:

I. اكبر مجموع من الأعمدة (L_1) وهو $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

2. أكبر مجموع من الصفوف (L_∞) وهو $\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

3. القياس الاقليدي (L_e) حيث لكل مصفوفة بحجم mx n يكون:

$$\|A\|_e = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

4. القياس الشعاعي، وهو أكبر قيمة مطلقة للقيم الذاتية للمصفوفةA ويرمز له L2.

وهذا يقودنا إلى تعريف القيمة الذاتية فنقول أنها القيمة التي تحقق المعادلة:

$$Ax = \lambda x \qquad (55)$$

أي أن هناك متجه x (متجه ذاتي) إذا ضرب بالمصفوفة A ينتج نفس المتجه مضروباً بالقيمة λ.

ولقد وجد أن L_2 يعطي أقل قيمة بين المقاييس الأخرى.

وبالعودة إلى المعادلتين (53) و (54) فلاجل أن تتحقق (54) سنطبق L_2 على المصفوفة التكرارية فإذا كان $\|-M^{-1}N\|_2$ أقل من الواحد فإن (54) تتحقق.

نظرية (4.1):

نفرض أن المصفوفة $-M^{-1}N$ لها القيم الذاتية λ_i, $i=1,\dots,n$. تتقارب الصيغة،

$$x^{(k+1)} = M^{-1}(b - Nx^{(k)})$$

إذا وفقط إذا كان القياس الشعاعي للمصفوفة $-M^{-1}N$ أقل من واحد أي:

$$\|-M^{-1}N\|_2 = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i| < 1$$

بالرغم من قوة النظرية حيث أن شرط التقارب هذا كاف وضروري إلا أن صعوبة إيجاد القيم الذاتية للمصفوفات خاصة بحجم $n > 3$ ، يحول دون الاعتماد عليها في التطبيق. لذا نلجأ إلى تخفيف ذلك الشرط بجعله كافٍ فقط وسهل التطبيق. وقد لاحظنا في الأمثلة السابقة كيف أن قيمة العناصر القطرية تلعب دوراً هاماً في التقارب.

نظرية (4.2):

تتقارب كل من طريقتي جاكوبي وسيدال في حل منظومة المعادلات الخطية.
$Ax = b$ إذا كانت مصفوفة المعاملات A ذات هيمنة قطرية.

البرهان:

ليكن v هو أحد المتجهات الذاتية للمصفوفة $-M^{-1}N$ المناظر للقيمة الذاتية λ إذاً

$$-M^{-1}N v=\lambda v \qquad (56)$$

أو

$$(\lambda M+N)v=0 \qquad (57)$$

نفرض أن أكبر مركبة للمتجه v هي v_i ، $1\le i\le n$

$$\therefore \quad |v_j|\le|v_i| \quad \forall j \text{ ، } j\ne i$$

فبالنسبة لطريقة جاكوبي حيث $M= D$ ،$N = L+ U$ فتكون المعادلة (57).

$$(\lambda D+L+U)v=0$$

وتكون المركبة i:

$$\lambda a_{ii} v_i+\sum_{\substack{j=i\\ j\ne i}}^{n} a_{ij} v_j =0$$

اذن

$$\lambda = \frac{-\sum_{j=1, j\ne i}^{n} a_{ij}v_j}{a_{ii}v_i}$$

$$|\lambda| = \frac{\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}} a_{ij}v_j\right|}{|a_{ii}|\,|v_i|}$$

وحيث أن:

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} a_{ij} v_j\right| = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \left|a_{ij} v_j\right| \leq \left|v_i\right| \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \left|a_{ij}\right|$$

ومن شرط الهيمنة القطرية يكون:

$$|\lambda| < 1$$

واما في طريقة سيدال حيث:

$$N = U \quad , \; M = L + D$$

وتصبح المعادلة (57) بالصورة:

$$(\lambda L + \lambda D + U) v = 0$$

والمركبة i تكون

$$\lambda \sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} v_j = 0$$

اذن

$$\lambda = \frac{-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} v_j}{\sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j} = 0 \qquad (58)$$

ومن حقيقة أن:

$$|A + B| \geq |A| - |B|$$

فإن

$$\left|\sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j\right| \geq \left|a_{ii} v_i\right| - \left|\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} v_j\right|$$

ولكن

$$\left|\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij} v_j\right| \leq \left|v_i\right| \sum_{j=1}^{i-1} \left|a_{ij}\right|$$

وعليه فأن:

$$\left|\sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j\right| \ge |a_{ii} v_i| - |v_i| \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| = |v_i| \left(|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \right)$$

اما بسط المعادلة (58) فيكون

$$\left|\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} v_j\right| \le |v_i| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$$

∴ تصبح المعادلة (58) بالشكل

$$|\lambda| = \frac{|v_i| \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|v_i| (|a_{ii}| - \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|)}$$

ومن شرط الهيمنة القطرية

$$|\lambda| < 1$$

إن العلاقة بين نظرية (4.1) ونظرية (4.2) والتقارب يتوضح في الصيغة،

هيمنة قطرية $\Rightarrow \max|\lambda| < 1 \Leftrightarrow$ تقارب

4.14 طريقة الاسترخاء Relaxation Method

لو عدنا إلى خوارزمية سيدال (50) وأعدنا كتابتها بالشكل :

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \left\{ \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad x_i^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_i^{(k)} \right) \right\} \tag{59}$$

فإنه يمكن اعتبار المقدار المحصور بين القوسين الملتويين هو العامل المراد إضافته لـ $x_i^{(k)}$ للحصول على $x_i^{(k+1)}$. فلو سمحنا لا نفسنا أن نزيد أو ننقص من هذا العامل لأجل تسريع التقارب فإن ذلك يكون بضرب العامل بعدد موجب w أي تكون الصيغة.

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \left\{ \frac{w}{a_{ij}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right\} \tag{60}$$

وقد وجد أن الشرط الضروري لتقارب هذه الصيغة هو أن تكون w في الفترة (0,2). أن تحديد قيمة w المثالية ليست بالعملية السهلة ولكن لوحظ أنه عندما تكون $1 < w < 2$ ولبعض القيم، فإنها تسرع التقارب الحاصل بطريقة سيدال. واضح أن $w = 1$ تعيدنا إلى طريقة سيدال عينها.

مثال 8: [2]

لحل المنظومة

$$\begin{aligned}
-3x + x_2 \qquad\quad + 3x_4 &= 1\\
x_1 + 6x_2 + x_3 \qquad\quad &= 1\\
x_2 + 6x_3 + x_4 &= 1\\
3x_1 \qquad + x_3 \;\; - 3x_4 &= 1
\end{aligned}$$

تحت الشرط $\max\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-2}$

نلاحظ ان مصفوفة المعاملات ليست ذات هيمنة قطرية ولكنها تتقارب وتقاربها بطيء كما موضح في الجدول (7) ولكن باستخدام $w = 1.6$ لحصل على النتائج الموضحة في الجدول (8).

جدول (7)

K	$x_1^{(K)}$	$x_2^{(K)}$	$x_3^{(K)}$	$x_4^{(K)}$
0	0	0	0	0
1	- 0.333	0.222	0.130	-0.623
2	- 0.883	0.980	0.895	-1.142
3	- 1.378	0.950	1.019	-1.612
4	- 1.826	1.006	0.987	-2.037
5	- 2.230	0.994	1.004	-2.421
6	:	:	:	:
48	- 5.953	0.993	0.993	-5.955
49	- 5.957	0.994	0.994	-5.960

جدول (8)

K	$x_1^{(K)}$	$x_2^{(K)}$	$x_3^{(K)}$	$x_4^{(K)}$
0	0	0	0	0
1	- 0.533	0.409	0.158	-1.303
2	- 2.079	0.534	0.377	- 2.872
3	- 3.605	0.807	0.593	- 4.259
4	-4.754	0.892	0.809	- 5.153
5	-5.450	0.969	0.897	- 5.683
:	:	:	:	:
14	- 6.003	1.000	1.000	- 6.001
15	- 6.000	1.000	1.000	- 6.000

ولقد اصطلح على تسمية الطريقة بـ (تحت الاسترخاء) Under Relaxation في حال كون $0 < w < 1$ وبـ (فوق الاسترخاء) Over Relaxation في حالة $1 < w < 2$.

4.15 التحسين التكراري Iterative Refinement

مع أننا لا نستخدم أي من الطرق التكرارية التي ذكرناها في هذا الفصل. إلا أننا نستخدم عملية تكرارية هدفها تحسين النتائج التي نحصل عليها في حل المنظومة الخطية بالطرق المباشرة.

فقد لاحظنا في الجزء (4.5) كيف أننا نقع في خطأ كبير في الحل النهائي نتيجة تقريب النتائج الوسطية أثناء الحل. فإذا أردنا إيجاد حل للمنظومة

$$Ax = b \tag{61}$$

فإننا لن نحصل على هذه المعادلة وإنما نحصل على حل قريب ($\tilde{x}$) من الحل الحقيقي x وبالتالي يكون:

$$A\tilde{x} \cong b \tag{62}$$

وعليه يكون

$$b - A\tilde{x} = r \tag{63}$$

حيث r يمثل ما يسمى بالباقي من الحل.

فإذا وضعنا المعادلة (63) بالصورة

$$Ax - A\tilde{x} = r \qquad (64)$$

أو

$$A(x - \tilde{x}) = r$$

$$A\ \ y = r \qquad (65)$$

فإن y يمثل الفرق بين x و $\tilde{x}$ وبحل المعادلة الأخيرة فإننا لحصل على:

$$\tilde{y} \approx A^{-1} r = A^{-1}(b - A\tilde{x})$$

$$= A^{-1} b - A^{-1} A\tilde{x} = x - \tilde{x} \qquad (66)$$

اي أن $\tilde{y}$ هو تقدير للخطأ في الحل التقريبي للمنظومة الاصلية. فبإضافة $\tilde{y}$ إلى $\tilde{x}$ نقترب حتماً إلى x.

وبتكرار العملية نصل إلى الحل المطلوب بالدقة المطلوبة.

نلخص العمل بالخطوات التالية:

مطلوب حل المنظومة $Ax = b$

ينتج $Ax^{(1)} = b$

$\therefore\ r^{(1)} = b - Ax^{(1)}$

بحل المنظومة $Ay^{(1)} = r^{(1)}$

نجد $y^{(1)} \approx A^{-1} r^{(1)}$

$\therefore\ x^{(2)} = x^{(1)} + y^{(1)}$

نجد $r^{(2)} = b - Ax^{(2)}$

ثم $y^{(2)} = A^{-1} r^{(2)}$

فنحصل على $x^{(3)} = x^{(2)} + y^{(2)}$

$\vdots$

ويتم التوقف عندما تصبح: $\|y^{(i)}\|_\infty \le \varepsilon$

مثال 9: [7]

في حل المنظومة الآتية:

$$\begin{bmatrix} 3.3330 & 1.5920 & -10.333 \\ 2.2220 & 16.710 & 9.6120 \\ 1.5611 & 5.1791 & 1.6852 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15913 \\ 28.544 \\ 8.4252 \end{bmatrix}$$

بطريقة كاوس للحذف وباستخدام خمس أرقام في الحسابات، نحصل على الحل التقريبي $x^{(1)} = (1.2001, 0.99991, 0.92538)^t$. علماً أن الحل الحقيقي هو $x = (1, 1, 1)^t$.

نبعد أن نجد $r^{(1)}$ حيث

$$r^{(1)} = b - A x^{(1)}$$

ونحل المنظومة

$$A y^{(1)} = r^{(1)}$$

نحصل على:

$$y^{(1)} = (-0.20008, \quad 8.9987 \times 10^{-5}, 0.074607)^t$$

$\therefore$ تكون $x^{(2)} = x^{(1)} + y^{(1)} = (1.000, 1.0000, 0.99999)^t$

نكرر فنجد:x

$$y^{(2)} = b - A x^{(2)}$$

ونحل المنظومة

$$A y^{(2)} = r^{(2)}$$

نحصل على

$$y^{(2)} = (1.5002 \times 10^{-9}, 2.0951 \times 10^{-10}, 1.000 \times 10^{-10})^t$$

فيكون

$$x^{(3)} = (1.0000, \quad 1.0000, \quad 1.0000)^t$$

تمارين

1. حاول حل المنظومات الآتية بطرق التعويض أو الحذف. ثم بين لماذا لم تفلح في الحالات التي ليس لها حل.

أ)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 6 \end{aligned}$$

جـ)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$$

د)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 5x_3 &= 14 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 5 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

هـ)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

و)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x - x_3 - 2x_4 &= -3 \end{aligned}$$

2. حل المنظومات الخطية الآتية بطريقة كاوس للحذف والتعويض التراجعي باستخدام رقمين في الحسابات وبالتدوير وبدون إعادة ترتيب المعادلات، (علماً أن الحل لكل منظومة هو $(x = (1, -1, 3)^t$

أ)
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned}$$

ب)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

جـ)
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

د)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= -9 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

3. أعطيت المصفوفة:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

جد M^3, M^2

4. بين أن منظومة المعادلات التالية ليس لها حل:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 &= 10 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \quad &= 16 \\ - x_2 + 8x_3 - 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

5. لو أبدلنا عناصر الجهة اليمنى في السؤال (4) بالقيم (3، 1، 3، 2) بين أن للمنظومة عدد لا نهائي من الحلول.

6. أ - حل المنظومة الآتية بطريقة كاوس للحذف مستخدما أربع مراتب في الحسابات.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ب - بعد وضع المعادلة الأولى في الأخير اعد حل المنظومة في (أ) بطريقة كاوس جوردن. (هل يختلف الحل عن السابق)

7. حل المنظومة الممتدة $Ax = b$ متعددة الجهة اليمنى بإضافة كل المتجهات bi مرة واحدة (بنفس الوقت) حيث:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \quad , \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad b_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

8. حل المنظومة الآتية بطريقة LU:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 16 \end{bmatrix}$$

9. أ- حل المنظومة الآتية بطريقة LU:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

ب- اعد الحل عندما يكون $b = [100, 0,0,0,200]^t$

10. حل المنظومات الآتية

أ) بطريقة كاوس للحذف وباستخدام رقمين في الحسابات.

ب) بطريقة كاوس للحذف وباستخدام رقمين في الحسابات مع المحورة الجزئية.

جـ) بحسابات مضبوطة وقارن بين أ- وب- وجـ-.

(i

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(ii

$$\begin{aligned} 0.04x_1 + 0.01x_2 - 0.01x_3 &= 0.06 \\ 0.2\ x_1 + 0.5\ x_2 - 0.2\ x_3 &= 0.3 \\ x_1 + 2\ x_2 + 4\ x_3 &= 11 \end{aligned}$$

11. حل المنظومات الخطية الآتية بطريقة جاكوبي مرة وبطريقة سيدال مرة أخرى مبتدئاً بالمتجه $x^{(0)} = o$ وجاعلا درجة السماح $\varepsilon = 10^{-2}$.

أ)

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0.375 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 &= 9 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6 \end{aligned}$$

12. حل المنظومات في السؤال (11) بطريقة SOR (طريقة الاسترخاء) جاعلاً $w=1.2$.

13. حل المنظومات الاتية بطريقة كاوس للحذف وتكرار التصفية.

أ)

$$\begin{aligned} 4.56x_1 + 2.18x_2 &= 6.74 \\ 2.79x_1 + 1.38x_2 &= 4.13 \end{aligned}$$

مستخدماً رقمين مدورين في الحسابات.

ب)

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= \frac{11}{6} \\ 5x_1 + \frac{10}{3}x_2 + \frac{5}{2}x_3 &= \frac{65}{6} \\ \frac{100}{3}x_1 + 25x_2 + 20x_3 &= \frac{235}{3} \end{aligned}$$

مستخدماً ثلاثة أرقام مدورة في الحسابات.

الاندراج والتقريب بمتعددات الحدود

5.1 متعددة حدود تيلر

5.2 الفروقات المنتهية

5.3 متعددة حدود لكرانج للاندراج

5.4 مقدار الخطأ في متعددة الحدود

5.5 الاندراج التكراري والفروقات المقسومة (النسبية)

5.6 الحدوديات القِطَعِية

5.7 الشرائح

5.8 التقريب بمنحنيات مناسبة

تمارين

الفصل الخامس

الاندراج والتقريب بمتعددات الحدود

Interpolation and Polynomial Approximation

مقدمة Introduction

في كثير من المواضيع العلمية والعملية نعتمد على التجربة في تحقيق هدفنا، ومن خلال التجارب نحصل على بيانات (معلومات) تحتاج إلى معالجة، لكن أحيانا ليس من الواقعي أن نجري تجربة لكل معلومة نريد معرفتها كأن تكون التجربة مكلفة أو أننا لا نستطيع أن نتحكم بالمعطيات للحصول على النتائج المرغوبة أو أننا نريد الحصول على نتائج توقعية (مستقبلية). لذلك نلجأ إلى صياغة ما نحصل عليه من نتائج بصورة معادلة رياضية يمكن أن نستخدمها عند الحاجة. ومن المعلومات المتراكمة فإن متعددة الحدود هي أبسط أنواع الدوال التي يمكن أن تسعفنا في هذه الأحوال فهي ذات صيغة توليدية ومتصلة وقابلة للاشتقاق والتكامل ويمكن أن نتعامل معها بواسطة الحاسوب بسهولة.

في الحقيقة أن متعددات الحدود لا تستخدم فقط عندما تكون الدالة الأصلية مجهولة بل في كثير من الأحيان تكون الدالة معلومة ولكن لتعقيداتها نستعيض عنها بمتعددات حدود تقريبية لها.

5.1 متعددة[*] حدود تيلر Taylor Polynomial

من الصيغة العامة لحدودية تيلر

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + R_n \qquad (1)$$

حيث R_n هو ما يسمى بالمتبقي، وغالباً ما يهمل هذا الجزء مما يتسبب في خطأ في حساب $f(x)$ ولذلك يسمى حد الخطأ.

وبذلك نكتب الصيغة التقريبية لحدودية تيلر بالشكل

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \qquad (2)$$

حيث إن

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \qquad (3)$$

و $\varepsilon > 0$

بالصيغة (2) نجد قيمة تقريبية للدالة f عند النقطة x ذلك من المعلومات المتوفرة عن الدالة عند نقطة x_0.

مثال(1):

لإيجاد حدودية تيلر من الدرجة الأولى والثانية والثالثة للدالة $f(x) = e^x$ انطلاقاً من النقطة $x_0 = 0$، نجد قيم الدالة ومشتقاتها لحد المشتقة الثالثة

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

(*) من الآن فصاعداً سنسمي متعددة الحدود بأسم حدودية.

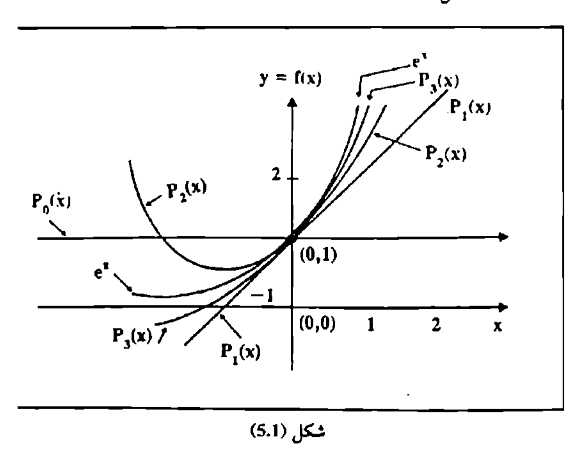
$$P_1(x) = f_0 + x f_0' = 1 + x,$$

$$p_2(x) = f_0 + x f_0' + \frac{x^2}{2} f_0'' = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = f_0 + x f_0' + \frac{x^2}{2} f_0'' + \frac{x^3}{3!} f_0'''$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

لاحظ شكل (5.1)



شكل (5.1)

فلو أردنا أن نستخدم هذه الحدوديات لتخمين قيم الدالة عند النقاط (0.5، 0.05، 0.001، 0 ، 1.5−) فأننا لنحصل على النتائج في الجدول (1) مقارنة مع القيم الحقيقية للدالة.

جدول (1)

x	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	e^x
.50	1.5	1.6250000	1.6458333	1.6487213
0.05	1.05	1.0512500	1.0512708	1.0512711
0.001	1.001	1.0010005	1.0010005	1.0010005
0.0	1.000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
-1.5	- 0.5	0.6250000	0.0625000	0.2231000

5.2 الفروقات المنتهية Finite Differences

في الجزء السابق استخدمنا حدودية تيلر لتقريب دالة معلومة وقابلة للاشتقاق أكثر من مرة وذلك في نقطة واحدة. وهذا النوع من التقريب يعمل في فترة صغيرة عادةً، ولكن ليس هذه دائماً الحال فنحن نحتاج إلى حدودية تقرب دالة غير معلومة أحياناً وعلى فترات طويلة.

نفرض أن لدينا مجموعة بيانات للمتغير بصورة الأزدواج $(x_i, f(x_i))$ ، $i = 0,...,n$ وأن

$$x_i - x_{i-1} = h \quad , \quad i = 1,...,n \tag{4}$$

نعرف مؤثر الفرق التقدمي Δ على الدالة f كما يلي:

$$\Delta f(x_i) = f(x_i+h) - f(x_i)$$

لنرمز للمقدار $f(x_i)$ بالرمز f_i فيصبح الفرق

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i \tag{5}$$

أما الفرق الثاني فهو

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_i &= \Delta(\Delta f_i) \\ &= \Delta(f_{i+1} - f_i) \\ &= f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i\end{aligned}$$

والفرق الثالث

$$\Delta^3 f_i = f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i$$

وبصورة عامة:

$$\Delta^n f_i = f_{i+n} - n f_{i+n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} f_{i+n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{i+n-3} + \dots \quad (6)$$

هذه الفروقات يمكن أن توضع بشكل جدول يسهل قرائتها.

جدول (2)

نموذج جدول الفروقات المتجهة التقدمية

i	x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	Δ^3	Δ^4	Δ^5
0	x_0	f_0	Δf_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	$\Delta^5 f_0$
1	x_1	f_1	Δf_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$	$\Delta^5 f_1$
2	x_2	f_2	Δf_2	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$	$\Delta^4 f_2$	$\Delta^5 f_2$
3	x_3	f_3	Δf_3	$\Delta^2 f_3$	$\Delta^3 f_3$	$\Delta^4 f_3$	$\Delta^5 f_3$
4	x_4	f_4	Δf_4	$\Delta^2 f_4$	$\Delta^3 f_4$	$\Delta^4 f_4$	
5	x_5	f_5	Δf_5	$\Delta^2 f_5$	$\Delta^3 f_5$		
6	x_6	f_6	Δf_6	$\Delta^2 f_6$			
7	x_7	f_7	Δf_7				
8	x_8	f_8					

لنكون جدول فروقات للنقاط

(1،7)، (2،10) ، (3،12) ، (4،13) ، (5،16) ،(6،20)

جدول (3)

i	x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$
0	1	7	3	-1	0	3	-7
1	2	10	2	-1	3	-4	
2	3	12	1	2	-1		
3	4	13	3	1			
4	5	16	4				
5	6	20					

من الملاحظات البينة هو أن كون عدد النقاط ست فاننا لا نحصل على أكثر من ـسة فروقات.

اعمل جدول فروقات للدالة $f(x)= x^3$ وعند النقاط x=1،3،5،7،9،11، ماذا ـلاحظ (قارن مع مشتقات متعددة الحدود x^3).

لنعد إلى الصيغة (5)، وعند x_0 يكون

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

او

$$f_1 = (1+\Delta) f_0$$

وهذا ينطبق على Δ^2 أيضاً حيث

$$f_2 = (1+\Delta)^2 f_0$$

وهكذا فإن

$$f_n = (1+\Delta)^n f_0 \qquad (7)$$

وبفك القوس نحصل على

$$f_n = f_0 + n\Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots + \Delta^n f_0 \qquad (8)$$

الصيغة (8) تبين اننا يمكن أن نجد قيمة الدالة f عند النقطة x_n باستخدام معلومات عن الدالة f عند x_0 فقط نحصل عليها من جدول الفروقات! ولكن أليست المعلومة f_n متوفرة لدينا؟

أن تعميم هذ الصيغة لتشمل ليس فقط النقاط المجدولة وانما اية نقطة ما بين النقاط المجدولة وحتى نقاط أخرى تقع خارج الجدول (من أعلى أو من اسفل) يعطي للصيغة قيمتها ولو كانت تحمل شيئاً من الخطأ. فتبديل $n=1,2,\ldots$ بـ m لتشمل الكسور أيضاً السالبة والموجبة، نكتب الصيغة (8) بدلالة m اي

$$f_m = f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \ldots \qquad (9)$$

هذه تتيح لنا تخمين قيمة الدالة f عند نقطة (x_m) غير موجودة في الجدول حيث إن

$$m = \frac{x_m - x_0}{h} \qquad (10)$$

وأن

$$h = \Delta x$$

تسمى الصيغة (9) بصيغة نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية.

مثال2: [1]

من الجدول الآتي خمن قيمة $f(0.1)$ باستخدام حدودية من الدرجة الثانية ثم حدودية من الدرجة الرابعة.

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
f_i	0	0.19867	0.38942	0.56464	0.71736	0.84147	0.93204

الحل:

نكون جدول الفروقات، ثم نختار x_0 لتكون 0 لأنها الأقرب إلى النقطة المطلوبة $x_m = 0.1$

$$m = \frac{0.1 - 0}{0.2} = 0.5$$

وبما أن الحدودية المطلوبة من الدرجة الثانية n=2

$$P_2(x_m) = f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

جدول (4)

i	x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$	$\Delta^5 f$	$\Delta^6 f$
0	0	0	0.19867	-0.00792	0.00761	0.00064	0.00022	0.00010
1	0.2	0.19867	0.19075	-0.01553	0.00697	0.00086	0.00032	
2	0.4	0.38942	0.17522	-0.02250	0.00611	0.00118		
3	0.6	0.56464	0.15272	-0.02861	0.00493			
4	0.8	0.71736	0.12411	-0.03354				
5	1.0	0.84147	0.09057					
6	1.2	0.93204						

إذن فإن

$$f_0 = 0$$

$$\Delta f_0 = 0.19867$$

$$\Delta^2 f_0 = -0.00792$$

$$\Delta^3 f_0 = 0.00761$$

$$\Delta^4 f_0 = 0.00064$$

وحيث إن $h = 0.2 \quad , m = 0.5$

فإن

$$P_2(0.1) = 0 + (0.5)(0.19867) + \frac{(0.5)(-0.5)}{2}(-0.00792) = 0.10033$$

وإن

$$P_4(0.1) = 0.10033 + \frac{(0.5)(-0.5)(-1.5)}{3!}(-0.00761) + \frac{(0.5)(-0.5)(-1.5)(-2.5)}{4!}(0.00064)$$

$$= 0.09983$$

ولو علمنا الدالة في المثال تمثل $\sin(x)$ نجد أن القيمة الحقيقية للدالة هي:

$$\sin(0.1) = 0.09983$$

وهي متطابقة مع الحدودية من الدرجة الثانية لثلاث مراتب عشرية أما مع الحدودية P_4 فإنها متطابقة لخمس مراتب عشرية.

لاحظ أننا عند إيجاد $P_4\ (x_m)$ استخدمنا قيمة $P_2(x_m)$ ولم نحتج لاعادة حسابها. من أهم عوامل دقة التخمين هي أن $|m|$ تكون أصغر ما يمكن وأن يتوفر عدد كاف من الفروقات.

ماذا لو أردنا أن نخمن قيمة $f(0.5)$ في المثال السابق. ان اعتبار $x_0=0$ يجعل m كبيرة، الأفضل أن نختار $x_0=0.4$ طالما أن لدينا من الفروقات ما يكفي لتكوين حدودية من الدرجة حتى الرابعة. السؤال المهم هو ماذا لو طلب منا تخمين قيمة الدالة في نقطة قريبة من النهاية السفلى للجدول، مثلاً 1.15 أو 1.25 في الجدول السابق؟ خاصة لو كانت الحدودية المطلوبة من درجة أعلى من الثانية. في هكذا حالة يصبح حتماً علينا اختيار $x_0=0.8$ على الأقل للحصول على P_2، عندها تكون

$$m = \frac{1.15 - 0.8}{0.2} = 1.75$$

وهذه القيمة تتضاعف في الحدود المتأخرة من الحدودية. نحن الآن في حرج!، ولكن لو قدمنا مؤشر الفرق التراجعي ∇ فسنحل الحرج حيث

$$
\begin{aligned}
\nabla f_i &= f_i - f_{i-1} \\
\nabla^2 f_i &= f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

وهكذا. بذلك يكون جدول الفروقات المتهية كما في الجدول (5).

ومن خواص Δ (دلتا) و ∇ (نبلة) نلاحظ العلاقات الآتية:

جدول (5)

i	x_i	f_i	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$	$\nabla^4 f$	$\nabla^5 f$
0	x_0	f_0					
1	x_1	f_1	∇f_1	$\nabla^2 f_2$			
2	x_2	f_2	∇f_2	$\nabla^2 f_3$	$\nabla^3 f_3$	$\nabla^4 f_4$	
3	x_3	f_3	∇f_3	$\nabla^2 f_4$	$\nabla^3 f_4$	$\nabla^4 f_5$	$\nabla^5 f_5$
4	x_4	f_4	∇f_4	$\nabla^2 f_5$	$\nabla^3 f_5$		
5	x_5	f_5	∇f_5				

$$
\left.
\begin{aligned}
\nabla f_0 &= f_1 - f_0 = \Delta f_{-1} \\
\nabla^2 f_0 &= \Delta^2 f_{-2} \\
&\vdots \\
\nabla^n f_0 &= \Delta^n f_{-n}
\end{aligned}
\right\}
\qquad (12)
$$

أن متعددة الحدود التراجعية تكتب بالصيغة

$$
P_n(x) = f_0 + m\nabla f_0 + \frac{m(m+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}\nabla^3 f_0 + \cdots \qquad (13)
$$

ومن العلاقات (12) نكتب نفس الصيغة بدلالة الفروقات التقدمية

$$
P_n(x) = f_0 + m\Delta f_{-1} + \frac{m(m+1)}{2!}\Delta^2 f_{-2} + \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} + \Delta^3 f_{-3} + \ldots (14)
$$

فبالعودة إلى المثال (2)، لو أردنا تخمين قيمة sin (1.1) من الجدول (4) فإننا نستخدم الفروقات التراجعية وباختيار $x_0=1.2$ تكون.

$$m = \frac{1.1-1.2}{0.2} = -0.5$$

$\therefore$

$$P_2(1.1) = 0.93204 + (-0.5)(0.09057) + \frac{(-0.5)(0.5)}{2!}(-0.03354)$$

$$P_2(1.1) = 0.89095$$

أما قيمة $P_4(1.1)$ فهي:

$$P_4(1.1) = 0.89095 + \frac{(-0.5)(0.5)(1.5)}{3!}(-0.00493) + \frac{(-0.5)(0.5)(1.5)(2.5)}{4!}(0.00118)$$

$$= 0.89121$$

علماً أن القيمة الحقيقية هي 0.89121 مقربة لخمسة مرتب عشرية .

مقارنة مع استخدام الصيغة التقدمية لتخمين sin (1.1) بواسطة P_2 بأن نضع $x_0=0.8$ نجد أن

$$P_2\,(1.1) = 0.85928$$

اما باستخدام حدودية من الدرجة الرابعة فلابد لنا من اختيار $x_0=0.4$ فيكون

$$P_4(1.1) = 0.98965$$

بالرغم من كل ذلك تبقى صيغ الفروقات المنتهية محدودة الاستخدام لحالات النقاط الموزعة توزيعاً منتظماً ولا تصلح لغير ذلك.

5.3 متعددة حدود لكرانج للاندراج Lagrange Polynomial Interpolation

ان سهولة صيغة الفروقات المنتهية وامكانية رفع درجة الحدودية إلى درجة أعلى دون أعادة الحسابات لم يجعلها المفضلة، فعندما تكون النقاط x_i، $i=0,1,\ldots,n$ غير موزعة بانتظام فإننا نحتاج إلى صيغة أخرى تتولى المهمة.

لتكن النقاط (x_i,f_i)، $i=0,1,\dots,n$ معطاة وأن x_i، $i=0,1,\dots,n$ متمايزة ($x_i \neq x_j$ عندما $i \neq j$).

مطلوب تكوين متعددة حدود من الدرجة n بالصيغة

$$P_n(x) = a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \tag{15}$$

وتحقيق جميع النقاط الجدولة (x_i, f_i)، $i= 0, \dots, n$.

اي أن

$$\left.\begin{aligned} P_n(x_0) &= a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = f_0 \\ P_n(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = f_1 \\ &\vdots \\ P_n(x_n) &= a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = fn \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

نكتب (16) بصيغة مصفوفات فتكون

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{17}$$

وبحل المنظومة لحدد المعاملات a_i، $i=0,1,\dots,n$. ولأن x_i، $i=0,1,\dots,n$ متمايزة فإن مصفوفة المعاملات قابلة للانعكاس [مصفوفة فاندرموند، Vandermonde] وللمنظومة حل وحيد.

من (16) يمكن أن نمثل a_0 كتركيب خطي من $f_i\big|_{i=0}^{n}$ إذ إن

$$\begin{aligned} a_0 + A_0 &= f_0 \\ a_0 + A_1 &= f_1 \\ &\vdots \\ a_0 + A_n &= f_n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_0 = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{A}_i f_i$$

كذلك بالنسبة لـ a_1 حيث

$$a_1 + B_0 = f_0$$
$$a_1 + B_1 = f_1$$
$$\vdots$$
$$a_1 + B_n = f_n$$

$$\therefore \quad a_1 = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{B}_i f_i$$

وهكذا حتى a_n حيث

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{Z}_i f_i$$

وباعادة كتابة الحدودية P_n بدلالة الصور الجديدة لـ $a_i\big|_{i=0}^{n}$ تصبح

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{A}_i f_i + x\sum_{i=0}^{n} \widetilde{B}_i f_i + x^2\sum_{i=0}^{n} \widetilde{C}_i f_i + \cdots + x^n\sum_{i=0}^{n} \widetilde{Z}_i f_i$$

وبتجميع معاملات f_i، $i=0,1,\ldots,n$ تصبح

$$\left.\begin{aligned} P_n(x) = {} & (\widetilde{A}_0 + x\widetilde{B}_0 x^2\widetilde{C}_0 + \cdots + x^n\widetilde{Z}_0)f_0 \\ & + (\widetilde{A}_1 + x\widetilde{B}_1 + \cdots + x^n\widetilde{Z}_1)f_1 \\ & + \\ & \vdots \\ & + (\widetilde{A}_n + x\widetilde{B}_n + \cdots + x^n\widetilde{Z}_n)f_n \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

أن كل قوس من الأقواس في (18) هو عبارة عن حدودية من الدرجة n.

لتكن

$$\ell_j(x) = \widetilde{A}_j + x\widetilde{B}_j + \cdots + x^n\widetilde{Z}_j \qquad (19)$$

$\therefore$ فإن

$$P_n(x) = \ell_0(x)f_0 + \ell_1(x)f_1 + \cdots + \ell_n(x)f_n \qquad (20)$$

ان هذه الصيغة لا بد أنها تحقق النقاط الجدولة ولذا فإن

$$P_n(x_0) = \ell_0(x)f_0 = f_0$$

وذلك يجعل $\ell_0(x_0) = 1$ وأن $\ell_j(x_0) = 0$ لكل j، $j \neq 0$

أما عند x_1 فإن

$$P_n(x_1) = \ell_1(x_1)f_1 = f_1$$

اي أن $\ell_1(x_1) = 1$ وإن $\ell_j(x_1) = 0$ لكل j، $j \neq 1$

وهكذا حتى x_n حيث

$$P_n(x_n) = \ell_n(x_n)f_n = f_n$$

∴ فإن $\ell_n(x_n) = 1$ وان $\ell_j(x_n) = 0$، لكل j، $j \neq n$. واضح أن ℓ_j لها الخاصية الآتية:

$$\ell_j(x_i) = \begin{cases} 1 & ، i = j \\ 0 & ، i \neq j \end{cases}$$

وحيث أن ℓ_j هي حدودية من الدرجة n فيمكن كتابتها بدلالة جذورها، اي

$$\ell_j(x) = A(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\cdots(x - x_n) \qquad (21)$$

حيث A هي عدد ثابت.

واضح أن $\ell_j(x_i) = 0$ لكل $x_j \neq x_i$.

ولكي تكون $\ell_j(x_j) = 1$ فإن الثابت A لابد أن يكون بالصورة

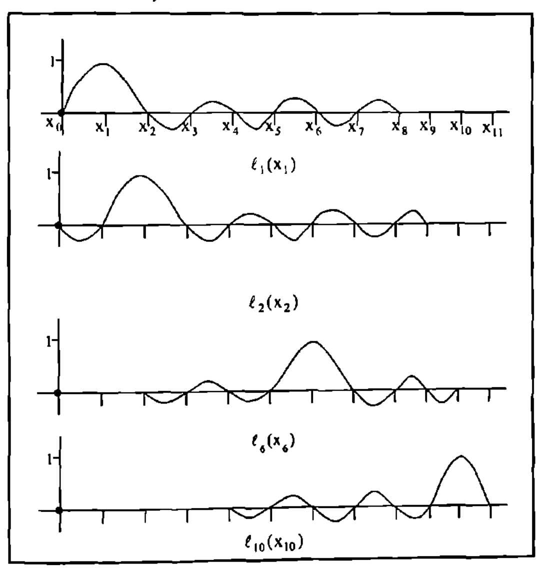
$$A = \frac{1}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\cdots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\cdots(x_j - x_n)}$$

وإذن تصبح صيغة $\ell_j(x)$ بالصورة

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \qquad (22)$$

وبهذا تصبح (20)

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \ell_j(x) f_j$$
$$= \sum_{j=0}^{n} f_j \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} \tag{23}$$



شكل (5.2)

مخطط بين مواقع اصفار حدوديات لكرانج (x)

مثال (3):

قرب الدالة $f(x)=\frac{1}{x}$ باستخدام حدودية من الدرجة الثالثة تمر بالنقاط (1،1)، (2،0.5)، (4،0.25)، (5،0.2). ثم خمن قيمة f(3)

الحل: نكون الجدول

i:	0	1	2	3
x:	1	2	4	5
f(x):	1	½	¼	⅕

الشكل العام للحدودية

$$P_3(x)=\ell_0(x)f_0+\ell_1(x)f_1++\ell_2(x)f_2+\ell_3(x)f_3$$

حيث

$$\ell_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)}=\frac{1}{12}(x^3-11x^2+38x-40)$$

$$\ell_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{1}{6}(x^3-10x^2+29x-20)$$

$$\ell_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=\frac{-1}{6}(x^3-8x^2+17x-10)$$

$$\ell_3(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x3_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{1}{12}(x^3-7x^2+14x-8)$$

وبالتعويض عن قيم f و ℓ في $P_3(x)$ ينتج

$$P_3(x)=-0.025x^3+0.3x^2-1.225x+1.95$$

وعند x=3 نحصل على:

$$P_3(3)=0.3$$

علماً ان القيمة الحقيقية $f(3)=\frac{1}{3}=0.3333$

لو اردنا أن نحسن من القيمة التخمينية بأن نضيف نقطة أخرى للجدول مثل (6,0.1667) كنقطة خامسة في الجدول فإننا نكون حدودية من الدرجة الرابعة:

$$P_4(x)=\ell_0 f_0+\ell_1 f_1++\ell_2 f_2+\ell_3 f_3+\ell_4 f_4$$

حيث:

$$\ell_4(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}=\frac{(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)}{(1-2)(1-4)(1-5)(1-6)}$$

وكذلك بقية الحدوديات $\ell_4,\ell_3,\ell_2,\ell_1$ كل واحد منهم أصبح من الدرجة الرابعة وبالتالي لابد من اعادة حساب قيمها من جديد، ثم إضافة الحد الجديد $\ell_4 f_4$. هذا مالم يحدث في الفروقات المنتهية كما ولابد أنك لاحظت عدد العمليات الحسابية الكبير الذي يتطلبه كتابة حدودية من الدرجة الثالثة وما يضاف إليها من عمليات عند رفعها إلى الدرجة الرابعة.

خوارزمية لكرانج (لتخمين قيمة الدالة f عند نقطة x)

1. المدخلات N، (x_i,f_i)، $i=1,\cdots,N+1$
2. $f=0$

$I = 1, \dots , N+1$

$t=1$

$j = 1,\dots, N+1$

إذا كان $i\neq j$

$$t=t*\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)$$

$f = f+ t*f_i$

3. المخرجات f

5.4 مقدار الخطأ في متعددة الحدود Error Estimation

عندما قمنا بتقريب جدولاً من قيم الدالة بمتعددة حدود فأننا مررنا هذه الحدودية بهذه النقاط. ذلك يعني أن الحدودية تحقق الدالة عند هذه النقاط بدون خطأ

$$|f(x_i) - P(x_i)| = 0 \qquad ، i = 0,1,\cdots,n$$

لكن ذلك لا يلغي الخطأ في نقاط أخرى عدا النقاط المجدولة وذلك واضح من نظرية 5.1

نظرية (5.1):

إذا كانت x_i ، $i = 0,1,\ldots,n$ نقاط متمايزة موزعة في الفترة $[a,b]$ وأن $f \in C^{n+1}[a,b]$ فإن لكل $x \in [a,b]$ يوجد عدد ξ في (a,b) بحيث

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_{(x)})}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n) \qquad (24)$$

حيث P هي متعددة الحدود المعطاة في (23).

قبل اثبات هذه النظرية نذكر نظرية رول العامة.

نظرية رول (5.2):

لتكن f معرفة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق n من المرات في الفترة (a,b)، إذا تلاشت f في n+1 من النقاط المتمايزة $x_i|_{i=0}^{n}$ في$[a,b]$ فإنه يوجد عدد c في $[a,b]$ بحيث$f^{(n)}(c) = 0$

برهان نظرية (5.1)

عندما تكون $x = x_k$ ، $k = 0,1,\ldots,n$

فإن $f(x_k) = P(x_k)$

وهذه تحقق (24) لأي $\xi(x)$ في (a,b). وإذا كانت $x \neq x_k$ لاي k ، $k = 0,1\ldots$ نعرف دالة g على t في $[a,b]$ كما يلي:

$$g(t) = f(t) - p(t) - [f(x) - P(x)]\frac{(t-x_0)(t-x_1)\cdots(t-x_n)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}$$

وبما أن $f \in C^{n+1}[a,b]$، وأن $P \in C^\infty[a,b]$ وأن $x \neq x_k$ لكل k فذلك يعني $g \in C^{n+1}[a,b]$.

فبوضع $t = x_k$ ينتج أن

$$g(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - [f(x) - P(x)] \underset{j=0}{\overset{n}{\pi}} \frac{(x_k - x_j)}{(x - x_j)} = 0$$

وعندما $t=x$ فينتج إلى

$$g(x) = f(x) - P(x) - [f(x) - P(x)] \underset{j=0}{\overset{n}{\pi}} \frac{(x - x_j)}{(x - x_j)} = 0$$

$\therefore$ فإن g تتلاشى في n+2 من النقاط المتمايزة وهي $x, x_0, x_1, \dots, x_n$.

وبتطبيق نظرية رول العامة يوجد عدد $\xi = \xi(x)$ في (a,b) حيث $g^{(n+1)}(\xi) = 0$ وأن

$$g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) + P^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)] \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left(\underset{j=0}{\overset{n}{\pi}} \frac{(t - x_j)}{(x - x_j)} \right) \Bigg|_{t=\xi} \qquad (25)$$

وحيث أن P حدودية من الدرجة n فإن $P^{(n+1)}(\xi) = 0$.

وحيث أن

$$\underset{j=0}{\overset{n}{\pi}} \frac{(t - x_j)}{(x - x_j)}$$

هي حدودية من الدرجة n+1 فإن

$$\frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}} \left(\underset{j=0}{\overset{n}{\pi}} \frac{(t - x_j)}{(x - x_j)} \right) = \frac{(n+1)!}{\underset{j=0}{\overset{n}{\pi}} (x - x_j)}$$

$\therefore$ (25) تصبح

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - [f(x) - P(x)]\frac{(n+1)!}{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}$$

من فوائد هذه النظرية ما يطرح في الأمثلة الآتية:

مثال(4): [1]

حدد درجة الدقة التي يمكن أن تحسب بها $\sqrt{17}$ باستخدام حدودية لكرانج لتقريب الدالة $f(x) = \sqrt{17}$ والتي تمر بالنقاط $x_0=14$، $x_1=16$، $x_2=19$، $x_3=25$.

الحل:

لدينا أربع نقاط ∴ أعلى درجة للحدودية هي الثالثة.

إن مقدار الخطأ في الصيغة (24) هو الذي يحدد دقة التقريب لذا فان

$$f(x) - P_3(x) = \frac{f^{(4)}}{4!}\prod_{j=0}^{3}(x - x_j)$$

يعني

$$|f(x) - P_3(x)| < \frac{1}{4!}\max_{14 \le \xi_{(x)} \le 25}|f^{(4)}(\xi(x))||(x-14)(x-16)(x-19)(x-25)|$$

وبما أن x المطلوبة هي 17

وأن $f^{(4)}(x) = \frac{-15}{16}x^{-7/2}$

∴

$$|f(x) - P_3(x)| \le \frac{1}{24}\left|\frac{-15}{16}\right|\left(\frac{1}{14^{7/2}}\right)|(17-14)(17-16)(17-19)(17-25)|$$

$$\le 0.000183$$

ذلك يعني أننا نستطيع الحصول على ثلاث مراتب عشرية صحيحة في تخمين قيمة $\sqrt{17}$ باستخدام الحدودية ضمن الشروط اعلاه.

مثال (5):

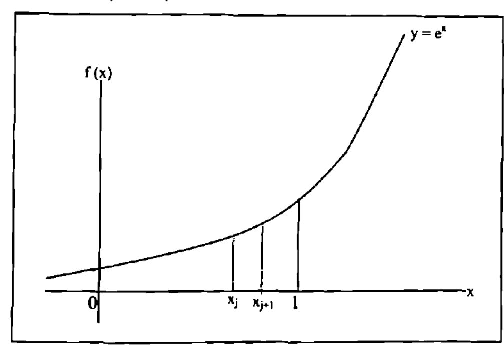
على فرض أننا أردنا تكوين جدولاً لقيم الدالة $f(x) = e^x$ في الفترة [0,1]. فما هو طول الفترة h بين كل نقطتين في الجدول، إذا اردنا استخدام حدودية خطية، لكي نحصل على خطأ لا يتجاوز 10^{-6}

الحل:

لنأخذ أية فترة جزئية $[x_j, x_{j+1}]$ كنموذج. لاي $x \in [x_j, x_{j+1}]$ يكون $x \in [0,1]$ وأن

$$|f(x) - P(x)| = \left|\frac{f^{(2)}(\xi(x))}{2!}(x - x_j)(x - x_{j+1})\right|$$

$$= \left|\frac{f^{(2)}(\xi(x))}{2!}\right| |(x - x_j)(x - x_{j+1})|$$



شكل (5.3)

وحيث أن h يمثل طول الفترة بين كل نقطتين فـان، $x_j=jh$، $x_{j+1}=(j+1)h$ ولـذ

فإن

$$\left|f(x)-P(x)\right| = \left|\frac{f^{(2)}(\xi(x))}{2!}\right| \left|(x-jh)(x-(j+1)h)\right|$$

∴

$$\left|f_{(x)}-P_j(x)\right| < \frac{1}{2!}\max_{\xi\in[0,1]}\left|f^{(2)}(\xi(x))\right| \max_{x_j\le x\le x_{j+1}}\left|(xjh)(x-(j+1)h\right|$$

$$= \frac{1}{2}\max_{0\le\xi\le 1} e^{\xi} \max_{x_j\le x\le x_{j+1}}\left|(x-jh)(x-(j+1)h)\right|$$

وبفرض أن

$$g(x)=(x-jh)\,(x-(j+1)h)$$

حيث $jh\le x\le (j+1)h$

وبتطبيق خطوات إيجاد القيم القصوى على الدالة $g(x)$ نجد أن

$$\max_{x_j\le x\le x_{j+1}}\left|g(x)\right| = \left|g((j+\frac{1}{2})h\right| = \left|\frac{-1}{4}h^2\right| = \frac{h^2}{4}$$

∴يكون

$$\left|f(x)-P(x)\right| \le \frac{eh^2}{8}$$

ولكي يكون مقدار الخطأ لا يتجاوز 10^{-6} فإن

$$\frac{eh^2}{8} \le 10^{-6}$$

أو

$$h^2 \le \frac{8\times 10^{-6}}{e}$$

$$h < 0.00172$$

∴

لذا يكون الاختيار الأنسب لـ h هو $h=0.001$

لابد لنا الان أن نذكر أن الصيغة (24) تنطبق على حدودية نيوتن للفروقات المتهية، وللاستفادة من أن النقاط الجدولة في هذه الحالة تكون منتظمة التوزيع أي:

$x_1=x_0+h \quad , x_2=x_0+2h,\dots,x_i= x_0+ih$

نضع

$(x-x_0) = mh \ , (x-x_1)= mh-h = (m-1)h \ , (x-x_2)= mh- 2h= (m-2)h$

بهذا نكتب الصيغة (24) بدلالة m

$$f(x)-P(x)=\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n)h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

$$=\binom{m}{n+1}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi(x)) \qquad ,x_0<\xi(x)<x_n \qquad (27)$$

5.5 الاندراج التكراري والفروقات المقسومة (النسبية)

Iterated Interpolation and The Divided Differences

ذكرنا سابقاً أن من نقاط الضعف في حدودية لكرانج هو صعوبة إضافة نقطة جديدة للجدول لغرض رفع درجة الحدودية إلى درجة أعلى، ذلك لما يتطلب من أعادة كل الحسابات أي لا يمكن الاستفادة من P_n لإيجاد P_{n+1}. هذه الصعوبة يمكن أن نذللها باستخدام ما يسمى بالاندراج التكراري (Iterated Interpolation).

لتكن f دالة معرفة على النقاط $x_i|_{i=0}^{n}$ ولتكن $m_i|_{i=1}^{k}$ اعداد صحيحة متمايزة حيث $0\le m_i\le n$ لكل i. لنرمز لحدودية لكرانج من الدرجة أقل من k والتي تتفق مع f بالنقاط $x_{m1},x_{m2},\dots,x_{mk}$ بالرمز $P_{m1,m2,\dots,mk}$.

فمثلاً للدالة $f(x)=x^3$ وعندما $x_4=8,\ x_3=6,\ x_2=4,x_1=3,x_0=1$ فإن $P_{1,2,4}$ هي الحدودية التي تتفق مع f عند النقاط $x_4=8,\ x_2=4,\ x_1=3$ أي

$$P_{1,2,4}=\frac{(x-4)(x-8)}{(3-4)(3-8)}(27)+\frac{(x-3)(x-8)}{(4-3)(4-8)}(64)+\frac{(x-3)(x-4)}{(8-3)(8-4)}(512)$$

نظرية (5.3):

لتكن f معرفة عند النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_k$ وأن، x_i, x_j نقطتان مختلفتان في المجموعة، إذا كان

$$P(x) = \frac{(x - x_j)P(x)_{0,1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,k} - (x - x_i)P(x)_{0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,k}}{(x_i - xj)} \qquad (28)$$

فإن P هي متعددة حدود لكرانج من الدرجة أقل من أو تساوي k والتي تتفق مع f من النقاط $x_0, x_1, \ldots, x_k$

البرهان:انظر [7] ص94

فإذا كانت هناك خمس نقاط (x_0,f_0), (x_1,f_1), (x_2,f_2), (x_3,f_3), (x_4,f_4) نجد أولاً الحدوديات الخطية $P_{0,1}$, $P_{1,2}$, $P_{2,3}$, $P_{3,4}$. (شكل (5.4)).

حيث:

$$i = 0,1,2,3 \quad , \quad P_{i,i+1}^{(x)} = \frac{(x - x_i)P_{i+1}^{(x)} - (x - x_{i+1})P_i^{(x)}}{x_{i+1} - x_i} \qquad (29)$$

ثم لجد الحدوديات من الدرجة الثانية $P_{0,1,2}$, $P_{1,2,3}$, $P_{2,3,4}$ (شكل (5.5)).

حيث

$$i = 1,2,3 \quad , P_{i,i+1,i+2}^{(x)} = \frac{(x - x_i)P_{i+1,i+2}^{(x)} - (x - x_{i+2})P_{i,i+1}^{(x)}}{x_{i+2} - x_i} \qquad (30)$$

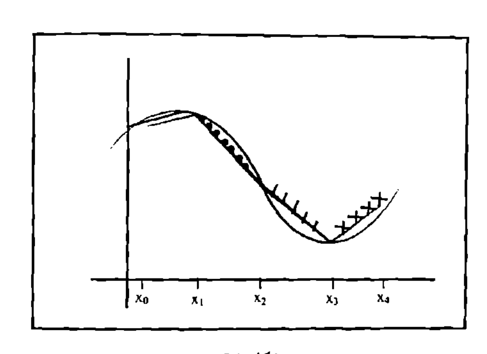
ومنها لجد الحدوديات من الدرجة الثالثة، (شكل (65.))، $P_{0,1,2,3}$, $P_{1,2,3,4}$

حيث

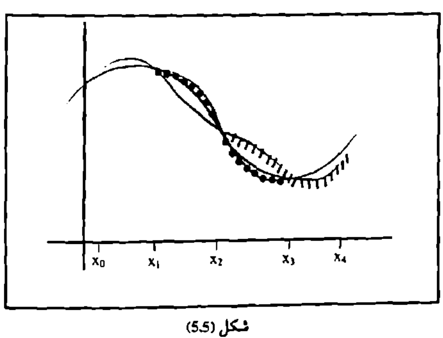
$$i = 0,1 \;,\; P_{i,i+1,i+2,i+3}^{(x)} = \frac{(x - x_{i+3})P_{i,i+1,i+2}^{(x)} - (x - x_i)P_{i+1,i+2,i+3}(x)}{x_{i+3} - x_i} \qquad (31)$$

وأخيراً لحصل على الحدودية من الدرجة الرابعة (شكل (75.)) حيث

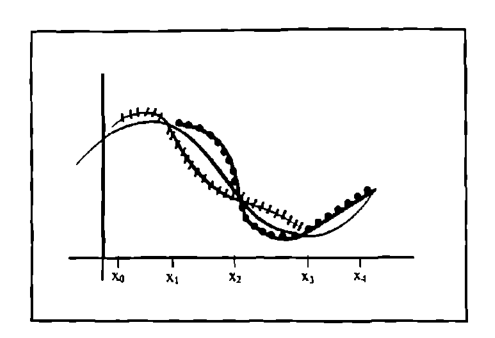
$$P_{0,1,2,3,4}^{(x)} = \frac{(x - x_4)P_{0,1,2,3}^{(x)} - (x - x_0)P_{1,2,3,4}^{(x)}}{x_4 - x_0} \qquad (32)$$



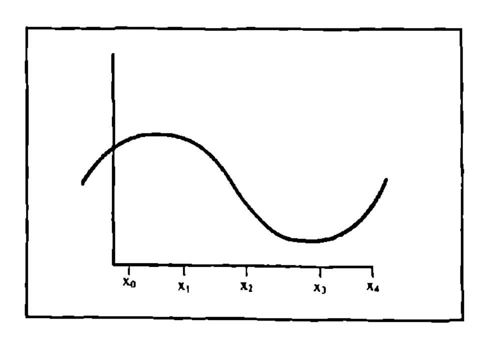
شكل (5.4)



شكل (5.5)



شكل (5.6)



شكل (5.7)

والجدول (5) يوضح هذه المراحل

جدول (5)

النقطة \ درجة الحدودية	0	1	2	3	4
X_0	P_0				
X_1	P_1	P_{01}			
X_2	P_2	P_{12}	P_{012}		
X_3	P_3	P_{23}	P_{123}	P_{0123}	
X_4	P_4	P_{34}	P_{234}	P_{1234}	P_{01234}

وفي حالة عدم الرضا من دقة الحدودية الأخيرة $P_{0,1,2,3,4}$ فإننا قد نضيف نقطة جديدة (x_5,f_5) وهذا يتطلب فقط إيجاد

$P_{0,1,2,3,4,5}$, $P_{1,2,3,4,5}$, $P_{2,3,4,5}$, $P_{3,4,5}$, $P_{4,5}$

وذلك باستخدام الصيغة (28) أي أن يضاف سطر آخر للجدول (5) وبنفس النسق.

الآن ننتقل إلى تقنية أخرى من تقنيات الاندراج إلا وهي صيغة الفروقات المقسومة (النسبية). نعرف الفرق النسبي بين نقطتين (x_0,f_0) , (x_1,f_1) بالصورة

$$\Delta f_0 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

حيث Δ هو رمز الفرق النسبي.

نفرض لدينا النقاط (x_0,f_0), (x_1,f_1), (x_2, f_2), (x_3,f_3), (x_4,f_4) نعرف الفرق النسبي الثاني بين x_2, x_1, x_0 على أنه

$$\Delta^2 f_0 = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{x_2 - x_0}$$

أما الفرق الثالث فهو

$$\Delta^3 f_0 = \frac{\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0}{x_3 - x_0}$$

وهكذا فإن

$$\Delta^k f_0 = \frac{\Delta^{k-1} f_1 - \Delta^{k-1} f_0}{x_k - x_0}$$

اما جدول الفروقات النسبية فيتكون بنفس أسلوب جدول الفروقات المنتهية. (جدول (6))

جدول (6)

X	f	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
X_0	f_0	$\Delta f_0 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$			
			$\Delta^2 f_0 = \frac{\Delta f_1 - \Delta f_0}{x_2 - x_0}$		
X_1	f_1	$\Delta f_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$		$\Delta^3 f_0 = \frac{\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0}{x_3 - x_0}$	
			$\Delta^2 f_1 = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{x_3 - x_1}$		$\Delta^4 f_0 = \frac{\Delta^3 f_1 - \Delta^3 f_0}{x_4 - x_0}$
X_2	f_2	$\Delta f_2 = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2}$		$\Delta^3 f_1 = \frac{\Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1}{x_4 - x_1}$	
			$\Delta^2 f_2 = \frac{\Delta f_3 - \Delta f_2}{x_4 - x_2}$		$\Delta^4 f_1 = \frac{\Delta^3 f_2 - \Delta^3 f_1}{x_5 - x_1}$
X_3	f_3	$\Delta f_3 = \frac{f_4 - f_3}{x_4 - x_3}$		$\Delta^3 f_2 = \frac{\Delta^2 f_3 - \Delta^2 f_2}{x_5 - x_2}$	
			$\Delta^2 f_3 = \frac{\Delta f_4 - \Delta f_3}{x_5 - x_3}$		
X_4	f_4				
		$\Delta f_4 = \frac{f_5 - f_4}{x_5 - x_4}$			
X_5	f_5				

لاحظ أن الخواص التي ذكرت عن جدول الفروقات المنتهية تنطبق على جدول الفروقات النسبية أيضاً.

هناك أكثر من رمز للفروقات النسبية منها

$$\Delta f_0 = f[x_0, x_1] = f_{01}$$

$$\Delta^2 f_0 = f[x_0, x_1, x_2] = f_{012}$$

لنستخدم الصورة اليمنى للفروقات النسبية (ذات الأدلة). من خواصها أن لفروقات النسبية متناظرة بالنسبة لأدلتها، أي أن

$$f_{ij}=\frac{f_j-f_i}{x_j-x_i}=\frac{f_i-f_j}{x_i-x_j}=f_{ji}$$

$x_i \qquad x_j$

كذلك

$$f_{ijk}=\frac{f_{jk}-f_{ij}}{x_k-x_i}$$

$x_i \qquad x_j \qquad x_k$

$$f_{ijk\ell}=\frac{f_{jk\ell}-f_{ijk}}{x_\ell-x_i}$$

$x_i \qquad x_j \qquad x_k \qquad x_\ell$

حيث يمكن اثبات أن تبديل ترتيب الأدلة لا يغير من قيمة الفرق.

لنفرض أن لدينا نقطتين x_m, x_0 فلتخمين قيمة f_m نكتب

$$f_{0m}=\frac{f_m-f_0}{x_m-x_0}$$

$\therefore$

$$f_m=f_0+(x_m-x_0)\,f_{0m} \tag{33}$$

فإذا كانت النقطة x_1 تقع بين x_0 , x_m فإن

$$f_{01m}=\frac{f_{0m}-f_{01}}{x_m-x_1}$$

$\therefore$

$$f_{0m}=f_{01}+(x_m-x_1)f_{01m}$$

ومن (33) يكون:

$$f_m=f_0+(x_m-x_0)\,f_{01}+(x_m-x_0)\,(x_m-x_1)f_{01m}$$

وبنفس الأسلوب يكون

$$f_{01m}=f_{012}+(x_m-x_2)f_{012m}$$

فينتج

$$f_m=f_0+(x_m-x_0)f_{01}+(x_m-x_0)(x_m-x_1)f_{012}+(x_m-x_0)\,(x_m-x_1)\,(x_m-x_2)\,f_{012m}$$

هكذا حتى نتوصل للصيغة العامة

$$f_m=f_0+(x_m-x_0)f_{01}+\ldots+(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{n-1})f_{01\ldots n} \qquad (34)$$

وكون أن x_m هي أحدى نقاط الجدول لا تظهر أي فائدة من هذه الصيغة لكن يمكن أن تطبق هذه الصيغة على نقاط غير مجدولة وعندها نكتب

$$P(x)=f_0+(x-x_0)f_{01}+\ldots+(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})f_{01\ldots n} \qquad (35)$$

وتسمى الصيغة التقدمية للفروقات النسبية.

حان الوقت لنقارن بين الصيغة (35) والصيغة (28)، فعندما n=1 نحصل على

$$P_1(x)=f_0+(x-x_0)f_{01}$$

$$=f_0+(x-x_0)\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$

$$=\frac{(x-x_0)f_1-(x-x_1)f_0}{x_1-x_0}$$

وهي الصيغة 29 عندما i=0

وعندما n=2 فإن

$$P_2(x)=f_0+(x-x_0)f_{01}+(x-x_0)(x-x_1)f_{012}$$

وهذه تكافئ الصيغة (30) عندما i=0

$$P_{012}(x)=\frac{(x-x_0)P_{12}(x)-(x-x_2)P_{01}(x)}{x_2-x_0}$$

وهكذا نجد أن صيغة الاندراج التكراري (28) ما هي إلا صيغة الفروقات النسبية (35)

مثال (6):

لدينا البيانات التالية

i:	0	1	2	3
x_i	1	3	7	8
f_i	1	27	343	512

مطلوب إيجاد الحدودية التكعيبية التي تحقق هذه البيانات ومن ثم تخمين قيمة الدالة عند x=4.

الحل:

$$P_3(x)= f_0+(x-x_0)\, f_{01}+(x-x_0)(x-x_1)f_{012}+(x-x_0)(x-x_1)\,(x-x_2)\, f_{0123}$$

لذا نحتاج أن نكون جدول الفروقات النسبية

i:	x_i	f_i	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1	1			
			13	11	
1	3	27			1
			79	18	
2	7	343			
			169		
3	8	512			

∴ فإن

$$P_3(x)= 1+(x-1)(13)+(x-1)(4-3)11+(x-1)(x-3)(x-7)1$$

$$= x^3$$

∴ $P_3(4)=64$

هذا باستخدام الفروقات النسبية، اما باستخدام الأندراج التكراري على حدوديات لاكرانج فإن

$$P_{01}(x) = \frac{(x - x_0)P_1(x) - (x - x_1)P_0(x)}{(x_1 - x_0)}$$
$$P_{12}(x) = \frac{(x - x_1)P_2(x) - (x - x_2)P_1(x)}{(x_2 - x_1)}$$
$$P_{23}(x) = \frac{(x - x_2)P_3(x) - (x - x_3)P_2(x)}{(x_3 - x_2)}$$

ثم

$$P_{012}(x) = \frac{(x - x_0)P_{12}(x) - (x - x_2)P_{01}(x)}{(x_2 - x_0)}$$
$$P_{123}(x) = \frac{(x - x_1)P_{23}(x) - (x - x_3)P_{12}(x)}{(x_3 - x_1)}$$

ثم

$$P_{0123}(x) = \frac{(x - x_0)P_{123}(x) - (x - x_3)P_{012}(x)}{(x_3 - x_0)}$$

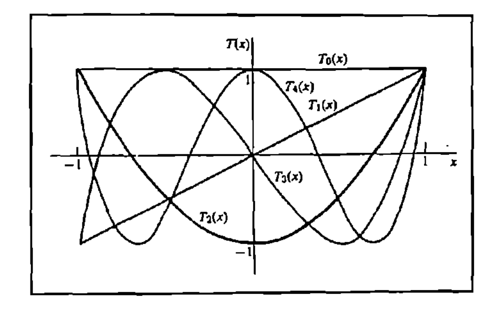
والأخيرة تعطي $P_{0123}(x) = x^3$

من المزايا الجيدة للفروقات النسبية هي أن ترتيب النقاط غير مهم ولا يغير من الأمر شيأ ولذا فعند إضافة نقطة جديدة للجدول بغض النظر عن موقعها القيمي فانها توضع في نهاية الجدول، وتجرى الحسابات بصورة صحيحة، كما أننا لا نحتاج لإعادة الحاسابات من جديد في حالة إضافة نقطة جديدة كما هو واضح من الصيغة (35).

5.6 الحدوديات القطعيّة Piecewise Polynomials

من مساوئ التقريب بمتعددات الحدود هو أنه عندما يكون عدد النقاط كبير نضطر إلى استخدام حدوديات من درجات عليا وهذا يؤدي إلى أن تكون الحدودية عالية التردد وبالتالي تكون غير مستقرة أي أن تغير بسيط في أحدى قيم البيانات يتسبب في خطا كبير. في الشكل 5.8 صورة لمتعددات حدود تشيشف (Chebyshev) تبين حالة التذبذب في الدرجات العليا حيث T_4, T_3, T_2, T_1, T_0 تمثل حدوديات من

الدرجات صفر، 1، 2، 3، 4 على التوالي، لنفرض أننا أردنا تقريب الدالة التالية بمتعددة حدود مرة من درجة 2 ثم 3 ثم 6 ثم 8 وعلى الفترة $-1 \le x \le 1$



شكل (5.8)

$$f(x) = 0 \qquad -1 \le x \le -0.2$$

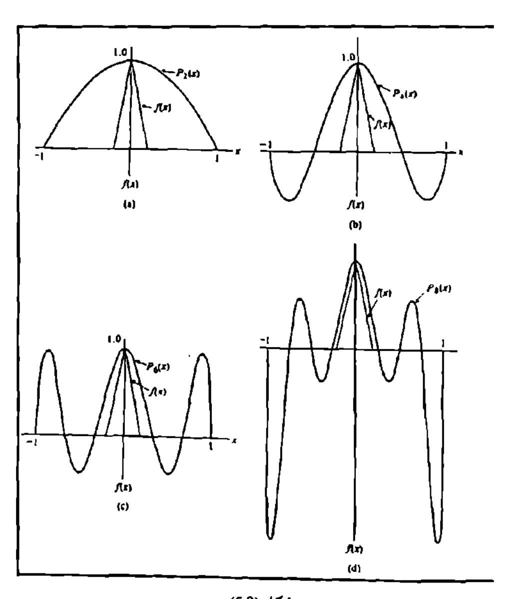
$$f(x) = 5||x| - 0.2| \qquad -0.2 \le x \le 0.2$$

$$f(x) = 0 \qquad 0.2 \le x \le 1$$

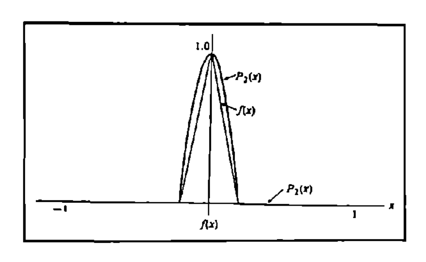
بتطبيق احدى طرق الاندراج السابقة نرى النتائج في الشكل (5.9). أن التذبذب الكبير في حدوديات الدرجات العليا والذي سببه هو القفزة عند x=0. والذي يحدث خارج النقطة صفر هو سبب التردد في استخدام حدوديات عالية الدرجة لهذا النوع من الدوال التي تعاني من تغيرات مفاجئة.

من الحلول المقترحة لمعالجة هذه المشكلة هو استعمال عدة حدوديات من درجة دنيا (تربيعية مثلاً). وكما موضح في الشكل (5.10) فإن هذا الأسلوب تغلب على المشكلة. أن مساوئ هذه الطريقة هو أن الميل غير متصل عند نقاط التقاء الحدوديات ففي الشكل (5.10) رغم أن الحدوديات المستخدمة على الفترات (‎-0.2‎, ‎-1‎) ،

‎(-0.2)، (1، 0.2) متصلة عند النقاط ‎-0.2‎ و 0.2 إلا أن المشتقة الأولى غير ، وهذا ما لا يستحب عند تقريب دالة، ملساء خاصة.



شكل (5.9)



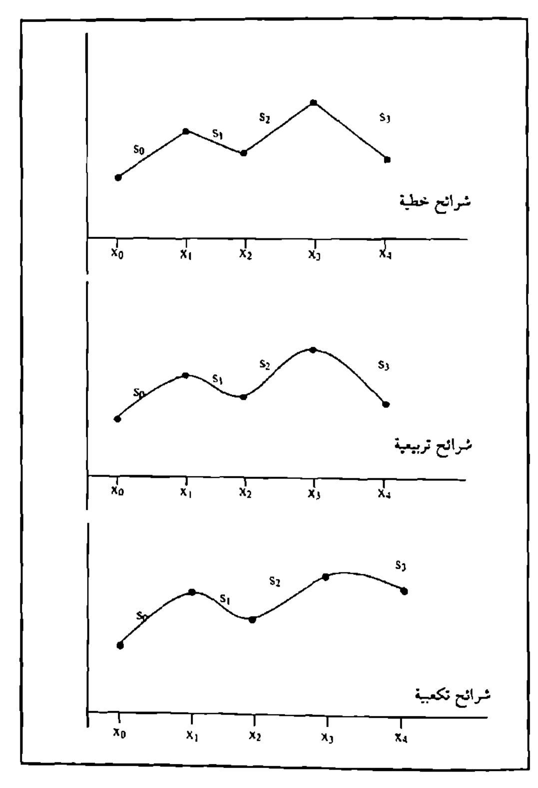
شكل (5.10)

ذلك يلاحظ في المثال (5) حيث استخدمنا حدودية خطية بين كل نقطتين للحصول على تقريب عالي الدقة للدالة e^x هذا النوع من التقريب يسمى الاستكمال المتقطع بمتعددات الحدود أو الاستكمال القطعي (Piecewise Polynomial).

هنا لا بد أن نذكر أن هناك نوع من متعددات الحدود التي تتفق مع الدالة ليس فقط بقيم الدالة بل وبالمشتقة الأولى للدالة عند النقاط المعطاة وهي حدودية هيرمت (Hermite). هذه الحدودية تحقق اتصال المشتقة الأولى، الا أن توفر معلومات عن المشتقة الأولى للدالة ليس دائماً متوفر، لذلك سنلجاء إلى الشرائح.

5.7 الشرائح Splines

هي متعددات حدود من نفس الدرجة تقرب الدالة في فترات جزئية كل حدودية تقرب فترة جزئية وتسمى شريحة (Spline).


s_0
s_1
s_2
s_3
شرائح خطية
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
s_0
s_1
s_2
s_3
شرائح تربيعية
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4
s_0
s_1
s_2
s_3
شرائح تكعيبية
x_0
x_1
x_2
x_3
x_4

شكل (5.11)

شكل (5.11) يبين ثلاثة أنواع من الشرائح خطية، تربيعية، تكعيبية، الشئ الجديد في هذه الشرائح هو انها عندما تكون متصلة من الدرجة n فإنها متصلة في نقاط التقاء كل شريحتين وكذلك المشتقات حتى الرتبة n-1 تكون متصلة عند تلك النقاط. وهذا ما يعطيها المرونة العالية للتقريب، فالشرائح التربيعية تتمتع بمشتقة أولى متصلة والشرائح التكعيبية تتمتع بمشتقات متصلة من الرتبة الأولى والثانية وهكذا.

مع أن هناك عدة أنواع من الشرائح إلا أننا سنركز على الشرائح التكعيبية Cubic Splines ذلك لأهميتها التطبيقية.

تعريف1: لتكن f دالة معرفة على الفترة $[a,b]$ ولتكن هناك مجموعة من النقاط $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. شريحة الاندراج التكعيبية S التي تقرب الدالة f هي دالة تحقق الشروط الآتية.

أ: أن S متعددة حدود تكعيبية، يرمزلها S_j في الفترة $[x_j, x_{j+1}]$ لكل $j=0,1\ldots,n-1$

ب: $S(x_j)=f(x_j)=y_j$ ، لكل $j=0,1,\ldots,n$

جـ: $S_{j+1}(x_{j+1})=S_j(x_{j+1})$ ، لكل $j=0,1,\ldots,n-2$

د : $S'_{j+1}(x_{j+1})=S'_j(x_{j+1})$ ، لكل $j=0,1,\ldots,n-2$

هـ: $S''_{j+1}(x_{j+1})=S''_j(x_{j+1})$ ، لكل $j=0,1,\ldots,n-2$

و: واحدة فقط من الشروط الحدية تتحقق

1. $S''(x_0)=S''(x_n)=0$ (شروط حرة)

2. $S'(x_n)=f'(x_n), S'(x_0)=f'(x_0)$ (شروط ملزمة).

يطلق اسم الشريحة الطبيعية (Natural Spline) في حالة استخدام الشروط الحرة.

يرمز عادة للمشتقة الثانية للشريحة بـ Mj ، $(j=0,1,\ldots,n)$ فعلى الفترة $[x_j, x_{j+1}]$ تكون المشتقة الثانية خطية ولذا فإن

$$S_j''(x)=M_j\frac{x_{j+1}-x}{h_j}+M_{j+1}\frac{x-x_j}{h_j} \tag{36}$$

حيث $h_j = x_{j+1} - x_j$ ، $j=0,1,\ldots,n-1$

وبالمكاملة مرتين، وإيجاد ثوابت التكامل نستنتج المعادلتين

$$S_j(x) = M_j \frac{(x_{j+1}-x)^3}{6h_j} + M_{j+1}\frac{(x-x_j)^3}{6h_j} + (y_j - \frac{M_j h_j^2}{6})\frac{x_{j+1}-x}{h_j} + (y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6})\frac{x-x_j}{h_j} \quad (37)$$

ان المعادلة (37) تحقق الشروط أ و ب و جـ و هـ في تعريف 1.

وباستخدام بقية الشروط لحصل على n+1 من المعادلات في الجاهيل M_i ، $i=0,\ldots,n$. فإذا فاضلنا S_j في المعادلة (37) بالنسبة إلى x لحصل على

$$S'_j(x) = \frac{-M_j}{2h_j}(x_j + x)^2 + \frac{M_{j+1}}{2h_j}(x-x_j)^2 - (\frac{y_j}{h_j} - \frac{h_j M_j}{6}) + (\frac{y_{i+1}}{h_j} - \frac{h_j M_{j+1}}{6}) \quad (38)$$

وبتبديل الدليل j بالدليل j − 1 لحصل على:

$$S'_{j-1} = -\frac{M_{j-1}}{2h_{j-1}}(x_j - x)^2 + \frac{M_j}{2h_{j-1}}(x-x_{j-1})^2 - (\frac{y_{j-1}}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}M_{j-1}}{6}) + (\frac{y_i}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}M_j}{6}) \quad (39)$$

ومن الشرط د في تعريف 1 ينتج

$$\frac{M_j h_{j-1}}{2} - \left(\frac{y_{i-1}}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}M_{j-1}}{6}\right) + \left(\frac{y_i}{h_{j-1}} - \frac{h_{j-1}M_j}{6}\right) = -\frac{M_j h_i}{2} - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i M_i}{6}\right) + \left(\frac{y_{j+1}}{h_j} - \frac{h_j M_{i+1}}{6}\right) \quad (40)$$

او بصياغة أخرى.

$$h_{j-1}M_{j-1} + 2M_j(h_{j-1} + h_j) + h_j M_{j+1}$$

$$=6\left[\frac{y_{j-1}}{h_{j-1}}-y_j\left(\frac{1}{h_{j-1}}+\frac{1}{h_j}\right)+\frac{y_{j+1}}{H_j}\right] \qquad ,i=1,2,\ldots,n-1 \qquad (41)$$

وبهذا تتكون n-1 من المعادلات وحيث أن عدد المجاهيل M_j هو n+1 فنحتاج إلى شرطين إضافيين وهذان يأتيان من الشروط الحدية المذكورة في (و) في التعريف وبذلك تصبح لدينا n+1 من المعادلات لإيجاد n+1 من المجاهيل

مثال (7): [2]

بفرض أن لدينا البيانات

xi:	0	1	3	3.5	5
yi:	1.00000	0.54030	-0.98999	-0.93646	0.28366

مطلوب تخمين قيمة الدالة عند x= 3.14259

الحل:

n=4

$h_3=1.5$, $h_2=0.5$, $h_1=2$, $h_0=1$

باستخدام شروط حدية حرة، ومن المعادلة (41) نحصل على المنظومة

$$\begin{bmatrix}6 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0.5\\ 0 & 0.5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ M_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.30545\\ 0.87221\\ 0.70635\end{bmatrix}$$

وبحل المنظومة نحصل على

$M_1= -0.72023$, $M_2= 1.24435$, $M_3=0.90398$

ومن المعادلة (37) فإن

$$S_2(x)=\frac{1.24435}{6(0.5)}(3.5-x)^3+\frac{0.90398}{6(0.5)}(x-3)^3$$
$$+\left(-\frac{0.98999}{0.5}-\frac{0.5(1.24435)}{6}\right)(3.5-x)$$
$$+\left(-\frac{0.93646}{0.5}-\frac{0.5(0.90398)}{6}\right)(x-3)$$

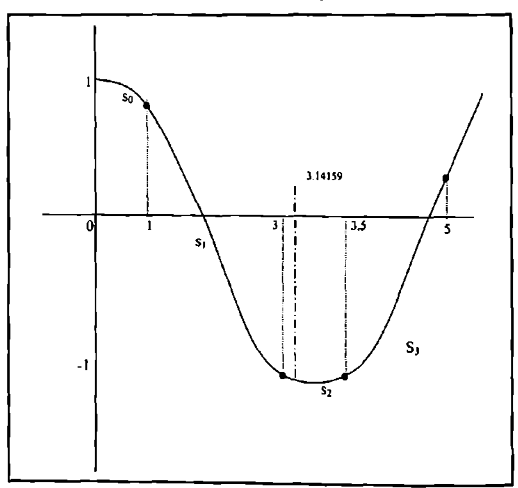
ولذا فإن

$$S_2(3.14159) = -1.00271$$

مقارنة بالقيمة الحقيقية (انظر شكل (5.12)

$$\cos(3.14159) = -1$$

من التطبيقات المهمة في الشرائح هي حل المعادلات التفاضلية العادية منها والجزئية وحل المعادلات التكاملية بالإضافة إلى إيجاد المشتقات والتكاملات للدوال المقربة، ولمزيد من التطبيقات انظر [8]



شكل (5.12)

من العلاقات المهمة في الشرائح التكعيبية عندما يكون $i=0,\ldots,n-1$ متساو وتساوي h ما يلي:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{h^2}{6}\left(M_{j+1} + 4M_j + M_{j-1}\right) \tag{42}$$

$$y_{i+1} - y_{i-1} = \frac{h}{3}\left(m_{j+1} + 4m_j + m_{j-1}\right) \tag{43}$$

حيث m ترمز للمشتقة الأولى للدالة S.

أخيراً لا بد أن نذكر بأن حدود الخطأ للشرائح التكعيبية بشروط حدية ملزمة تعطى من النظرية الآتية:

نظرية (5.3):

لتكن $f\in C^4[a,b]$، وإن $\max_{a\le x\le b}\left|f^{(4)}(x)\right| \le M$، إذا كان S هو الشريحة التكعيبية الوحيدة الاندراجية لـ f بالنسبة للنقاط $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ والتي تحقق الشرط $S'(a)=f'(a)$، $S'(b)=f'(b)$ فإن $\max_{a\le x\le b}\left|f(x)-S(x)\right| \le \frac{5M}{384}\max_{0\le j\le n-1}(x_{j+1}-x_j)^4$

كذلك الحال في حالة الشروط الحرة فانها تحقق خطأ من الرتبة الرابعة أيضاً.

5.8 التقريب بمنحنيات مناسبة Curve Fitting Approximation

في الأجزاء السابقة من هذا الفصل كنا نستخدم متعددات حدود تحقق الدالة في النقاط المعطاة في الجدول أي أن

$$f(x_i) - P_n(x_i)=0$$

لكل النقاط المجدولة $x_1, x_2, \ldots, x_n$

في هذا الجزء سوف يكون التقريب بحيث انه ليس من الضروري أن يمر المنحنى بنقاط الجدول وانما يكون أقرب ما يمكن منها. كما أن عدد النقاط سوف لن يكون محدداً لدرجة الحدودية المستخدمة بل أن درجة ونوع المنحنى المستخدم في التقريب يعتمد على نوع البيانات وليس على عددها. أي أننا نحدد درجة متعددة الحدود التقريبية بناءاً على معلوماتنا عن الحالة قيد الدرس والعلاقة بين المتغيرات في تلك الحالة.

من الطرق الشائعة الاستعمال في هذا المجال هي طريقة المربعات الصغرى (Least Squares) [وكما يشير الأسم فهي تدل على أقل (Least) قيمة لمربع (Square) الخطأ بين الدالة ومتعددة الحدود التقريبية].

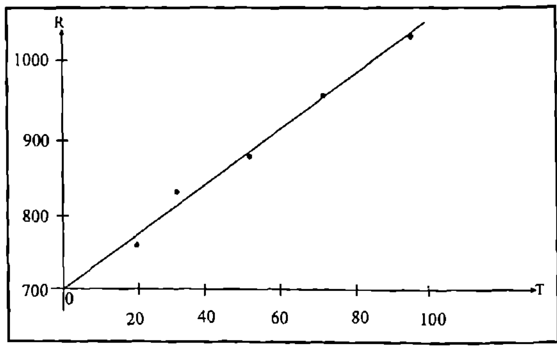
مثال 8:

بفرض أن في معمل الفيزياء سجلنا المقاومة الكهربائية (R) أمام درجة الحرارة (T) لتجربة معينة وظهر لدينا الجدول الآتي حيث T ترمز لدرجة الحرارة و R للمقاومة

جدول (7)

T	20.5	32.7	51.0	73.2	95.7
R	765	826	873	942	1032

مطلوب إيجاد صيغة رياضية تربط بين المقاومة ودرجة الحرارة لكي نتمكن من تخمين قيمة المقاومة عند أية درجة حرارة أخرى.



شكل (5.13)

من خلال الخبرة الفيزيائية وكذلك توزيع نقاط الجدول، شكل (5.13) فإن معادلة الخط المستقيم.

$$R = aT + b \tag{44}$$

يمكن أن نترجم العلاقة، على ان نستخرج قيم a وb لكي نحدد أي من المستقيمات يمثل هذه العلاقة بحيث أنه يحقق اقل مربع للخطأ عند نقاط الجدول.

فلو رمزنا للقيم في التجربة بـ y_i عند النقاط x_i وأن f_i تمثل قيمة الدالة التقريبية

$$f_i = ax_i + b \tag{45}$$

فعلينا تحديد قيم a و b بحيث يكون $|y_i - f_i|^2$ اقل ما يمكن، لكل $i = 1, 2, \ldots, n$

لتكن $e_i = y_i - f_i$ ، حيث $i = 1,2,\ldots, n$.

∴ فإن صيغة المربعات الصغرى تتطلب أن يكون

$$\delta = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

أو ان

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

تكون أصغر ما يمكن حيث، n يمثل عدد النقاط في الجدول.

أن δ هي عبارة عن دالة بمتغيرين، a و b ولإيجاد قيمتها الصغرى فإنها يجب أن تحقق ما يلي:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial a} &= 0 = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-x_i) \\ \frac{\partial \delta}{\partial b} &= 0 = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - ax_i - b)(-1) \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} a\sum_{1}^{n} x_i^2 + b\sum_{1}^{n} x_i &= \sum_{1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{1}^{n} x_i^2 + bn &= \sum_{1}^{n} y_i \end{aligned} \qquad (47)$$

وبحل (47) بالنسبة لـ a و b نحصل على

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \\ b &= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)\sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

وبتطبيق ذلك على الجدول (5.7) يكون

$$\sum_{1}^{5} T_i = 273.1 \,,\ \sum_{1}^{5} R_i = 4438 \,,\ \sum_{1}^{5} T_i^2 = 18607.27,\ \sum_{1}^{5} T_i R_i = 254932.5 \,,\ n = 5$$

ومن (48) ينتج

$$b = 702.2 \quad , \quad a = 3.395$$

∴ تكون المعادلة (44)

$$R = 3.395T + 702.2$$

يطلق اسم المعادلات القياسية على (47).

من الطبيعي أن نفكر في تقريب البيانات المجدولة بمتعددة حدود ليست خطية بل من الدرجة n.

بفرض ان لدينا المجموعة $\{(x_i, y_i) | i = 0,1,\cdots,m\}$ ويراد تقريبها بحدودية من الدرجة n ، $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

حيث n<m، ذلك بطريقة المربعات الصغرى. فأننا نسلك نفس الطريق ونضع

$$\delta = \sum_{i=0}^{m} \left(y_i - P(x_i)\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=0}^{m} P(x_i) y_i + \sum_{i=0}^{m} \left(P(x_i)\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{m} y_i^2 - 2\sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right) y_i + \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j x_i^j\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{m} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{i=0}^{m} y_i x_i^j\right) + \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_j a_k \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^{j+k}\right)$$

ولاجل الحصول على أصغر قيمة للمقدار δ فانه يجب أن يحقق $\frac{\partial \delta}{\partial a_j} = 0$ لكل $j = 0,1,\ldots,n$

$$\therefore \quad \frac{\partial \delta}{\partial a_j} = -2\sum_{i=0}^{m} y_i x_i^j + 2\sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{i=0}^{m} x_i^{j+k} = 0 \quad , \qquad j = 0,1,\ldots,n$$

وهذا ينتج n+1 من المعادلات القياسية كل منها تحتوي n+1 من المجاهيل هي $a_n, \ldots, a_1, a_0$ وتكون بالصورة

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^0 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^n = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^1$$

$$\vdots$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+1} + \cdots + a_n \sum_{i=1}^{m} x_i^{n+n} = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^n$$

مثال (9): [7]

أوجد حدودية من الدرجة الثانية ملائمة للبيانات في جدول (8) بطريقة المربعات الصغرى

جدول (8)

i:	0	1	2	3	4
x_i:	0	0.25	0.5	0.75	1
y_i:	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

الحل:

في هذا المثال نجد ان $n=2$ و $m=4$ اما المعادلات القياسية فهي

$$5a_0+2.5a_1+1.875a_2=8.7680$$

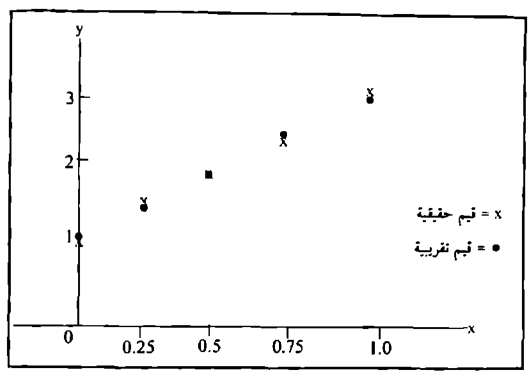
$$2.5a_0+1.845a_1+1.5625a_2=5.4514$$

$$1.875a_0+1.5625a_1+1.3828a_2=4.4015$$

بحل هذه المنظومة نحصل على $a_0=1.0052$، $a_1=0.8641$، $a_2=0.8437$ وعليه تكون الحدودية من الدرجة الثانية بالصورة.

$$P_2(x)=1.0052+0.8641x+0.8437x^2$$

الشكل (5.14) يبين صورة هذه الحدودية



شكل (5.14)

بالمقارنة بين قيم الجدول وقيم متعددة الحدود نكتشف مقدار الفرق عند كل نقطة كما في الجدول (9)

جدول (9)

i:	0	1	2	3	4
x_i:	0	0.25	0.5	0.75	1
y_i:	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183
$P_2(x_i)$	1.0052	1.2740	1.6482	2.1279	2.7130
y_i-$P_2(x_i)$	-0.0052	0.0100	0.0005	-0.0109	0.0053

يبين الجدول توزيع الخطأ على فترة التقريب وواضح أن الخطأ غير متجانس الا أن خاصية المربعات الصغرى تتحقق في أن

$$\sum_{i=0}^{4}(y_i - P_2(x_i))^2 = 2.76\times10^{-4}$$

وهي أقل خطأ ممكن باستخدام حدودية تربيعية

في بعض الأحيان تكون البيانات المجدولة تعبر عن علاقة اسية (exponential) أو علاقة هندسية (geometric) بين y, x

$$y = be^{ax} \tag{49}$$

و

$$y = bx^{a} \tag{50}$$

ولكن لصعوبة التعامل مع هذه الدوال كونها تولد منظومات لا خطية فإننا نحول المسألة إلى مسألة خطية باستخدام اللوغاريتمات. فللمعادلة (49) تصبح

$$\ell n(y) = \ell n(b) + ax \tag{51}$$

والمعادلة (50) تصبح

$$\ell n(y) = \ell n(b) + a\ell n(x) \tag{52}$$

مثال (10):

نفرض لدينا البيانات كما في الجدول (10). القيم المجدولة تشير إلى علاقة اسية. فلو رسمنا المخطط لقيم xi ضد قيم ℓny_i لنتج بيان خطي

جدول (10)

i:	1	2	3	4	5
x_i:	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
y_i:	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46

لذلك نحول العلاقة

$$y = be^{ax}$$

إلى العلاقة

$$\ell ny = \ell nb + ax$$

فيكون جدول بقيم ℓny

جدول (11)

i:	1	2	3	4	5
$\ell n\, y_i$	1.629	1.756	1.876	2.008	2.135

وبتطبيق المعادلة (48) ينتج

$a = 0.5056$

$\ell nb = 1.122$

ومنها $b = 3.071$

$y = 3.071\, e^{0.5056x}$

إن التعويض بقيم x الجدولة يبين دقة هذه العلاقة مقارنة مع قيم y في الجدول

جدول (12)

x_i:	1.00	1.25	1.5	1.75	2
y_i:	5.10	5.79	6.53	7.45	8.46
$3.071\, e^{0.5056x}$:	5.09	5.78	6.56	7.44	8.44

حاول تقريب الجدول بمعادلة خطية وقارن النتائج.

لا شك في أن دقة النتائج المتحصل عليها بطريقة المربعات الصغرى في تقريب بيانات مجدولة تجعلنا نفكر في تقريب دالة معلومة بنفس الطريقة (طريقة المربعات الصغرى). عندها فإننا نحاول الحصول على حدودية $P_n(x)$ تقرب الدالة $f(x)$ بغض النظر فيما إذا كانت الحدودية تنطبق مع الدالة في بعض النقاط أو لا، وإنما لا بد أن تحقق أقل خطأ معرف بالصيغة

$$\int_a^b \left((f(x) - P_n(x)\right)^2 dx \qquad (53)$$

سوف لن نخوض في هذا الموضوع لكن للاستزادة يمكن للقارئ مراجعة المصدر [7].

تمارين

1. احسب حدودية تلير من الدرجة الرابعة حول النقطة الثابتة $x_0=3$ للدالة $f(x)=\sqrt{1+x}$. استخدم هذه الحدودية لتخمين قيمة $\sqrt{4.1}$. ما الخطأ الفعلي في هذه القيمة؟

2. جد اصغر درجة لحدودية تيلر $P_n(x)$ تقرب الدالة $f(x)=\ell n|x|$ حول النقطة $x_0=1$ بحيث يكون مقدار الخطأ المطلق لا يزيد على 10^{-5} وأن $x\in(0,2)$.

3. ما عدد الحدود (n)اللازمة لتقريب الدوال الآتية بحدودية تيلر بحيث يكون مقدار الخطأ المطلق لا يزيد عن ∓ 0.00001.

أ. $f(x)=\sin(x)\ ,\ x_0=0\ ,\ x\in(0,\pi/2)$

ب. $f(x)=e^x\ ,\ x_0=1\ ,\ x\in(0,3)$

ج. $f(x)=(x-1)^{1/2}\ ,\ x_0=0\ ,\ x\in(0,2)$

4. كون جدول الفروقات للبيانات التالية:

X	1.20	1.25	1.30	1.35	1.40	1.45	1.50
f(x)	0.1823	0.2231	0.2624	0.3001	0.3365	0.3716	0.4055

5. في السؤال (4) ما هي الدرجة المطلوبة لمتعددة حدود تحقق بالضبط البيانات السبع؟ ما هي درجة متعددة الحدود الأدنى التي تقريباً تحقق البيانات؟ حقق إجابتك؟

6. كون جدولاً للفروقات حتى الفرق الرابع للبيانات الآتية

X	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	0.7	0.8	1.5	3.4	7.1	13.2	22.3	35.0

بفرض انك اخطات بكتابة f(x) عند x=4 فكتبت 4.3 بدلاً من 3.4 كيف يكون الجدول عندها؟

7. استخدم حدودية لاكرانج الاندراجية المناسبة من الدرجة الأولى، الثانية، الثالثة، الرابعة لتقريب ما يلي

أ: f(2.5) حيث

X:	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8
f(x):	0.5103757	0.5207843	0.5104147	0.4813306	0.4359160

ب: f(0.5) حيث

X:	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x):	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

8. اعد حل سؤال (7) باستخدام حدودية نيوتن التقدمية مرة والتراجعية مرة بحيث تحصل على احسن تقريب ممكن.

9. استخدم البيانات أدناه لايجاد y عند x=0.58 مستخدماً حدودية تكعيبية تتفق مع الجدول في النقاط x=0.3,0.5,0.7,0.9 بصيغة نيوتن التقدمية

X	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
y	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

10. حول الحدودية التكعيبية التي حصلت عليها في سؤال (9) إلى الصيغة العامة

$P_3(x)= a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

ما هي اقل درجة لمتعددة حدود تتفق مع الجدول السابق في كل من النقاط السبع؟

11. يقال عن المؤثر α بأنه مؤثر خطي إذا حقق ما يلي:

أ. $\alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$

ب. $\alpha(cf)= c\alpha f$، حيث c ثابت.

بين أن كلاً من ∇وΔ هو مؤشر خطي.

12. يقال عن مؤثرين α و β أنهما تبادليان إذا كانت النتيجة لا تتغير بتغير ترتيبهما في التأثير على دالة، أي أن $\alpha(\beta f) = \beta(\alpha f)$. بين أن ∇وΔ متبادلان.

13. إذا عرفنا D بأنه المؤثر التفاضلي، بين أن D تبادلي مع ∇وΔ.

14. استخرج قيمة $e^{0.2}$ من القيم $e^{0}=1$، $e^{0.1} = 1.1052$, $e^{0.3} = 1.3499$. جد الحد الأعلى والأدنى للخطأ في القيمة المتحصلة. قارنه مع الخطأ الحقيقي.

15. كرر السؤال (14) لاستكمال $e^{0.4}$.

16. استخدم الاندراج التكراري لتقريب قيمة $\sqrt{3}$ من الدالة $f(x)=3^x$ والقيم $x_0= - 2$، $x_1= -1$، $x_2=0$، $x_3=1$، $x_4=2$.

17. أ: استخدم الاندراج التكراري لتقريب $f(1.03)$ من $P_{0,1,2}$ للدالة $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$ حيث $x_0=1$, $x_1=1.05$ و $x_2=1.07$.

ب: بفرض أن التقريب في (أ) غير عالي الدقة. احسب $P_{0,1,2,3}$ حيث $x_3= 1.04$.

18. كون متعددة حدود الفروقات النسبية من الدرجة الرابعة للبيانات الآتية:

X:	0.0	0.1	0.3	0.6	1.0
f(x):	− 6.00000	− 5.89483	− 5.65014	− 5.17788	− 4.28172

19. بفرض أن نقطة أخرى اضيفت للجدول في السؤال (18) $f(1.1)= - 3.99583$، كون حدودية من الدرجة الخامسة.

20. برهن أنه إذا كانت x2,x1,x0 نقاط مختلفة فإن

$$f[x_0,x_1,x_2]= f[x_1,x_2,x_0]= f[x_2,x_0,x_1]$$

21. اثبت أن مجموع حدوديات لاكرانج $\ell_n(x),\cdots,\ell_1(x),\ell_0(x)$ هي الوحدة، اي

$$\sum_{i=0}^{n}\ell_i(x)=1$$

(تلميح: افترض أن f(x)=1)

22. الجدول الآتي يمثل الدالة f(x)= cos(x)

x:	0.698	0.733	0.768	0.803
f(x):	0.7661	0.7432	0.7193	0.6946

خمن قيمة cos (0.75) وقارنها مع القيمة الصحيحة، ثم أوجد تقديراً للخطأ الناتج عن التخمين ذلك باستخدام حدودية لكرانج.

23. استخدم الشرائح التكعيبية لإيجاد تقريب لما يلي:

أ: f(5.3) حيث:

X:	0.5	5.2	5.4
f(x):	2.168861	1.797350	1.488591

ب: f(5.2) حيث:

X:	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x):	0.9798652	0.9177710	0.8080348	0.6386093	0.3843735

مرة بالشروط الحرة، ومرة بالشروط الملزمة حيث:

أ: $f'(5.0)=-1.495067$, $f'(5.4)=-1.070309$

ب: $f'(0.2)= 0.20271$, $f'(1.0) = 1.55741$

24. استخدم الشرائح التكعيبية بالشروط الملزمة لتقريب الدالة $f(x) = 3xe^{x} - e^{2x}$ عند x=1.03 من البيانات

x:	1.0	1.02	1.04	1.06
f(x):	0.76578939	0.79536678	0.82268817	0.84752226

خمن مقدار الخطأ بحسب نظرية (5.3) وقارنه بالخطأ الحقيقي.

25. أوجد متعددة حدود المربعات الصغرى من الدرجات 1،2،3،4 للبيانات في الجدول الآتي:

x:	0	1	2	3	4	5
x_i:	0	0.15	0.31	0.5	0.6	0.75
y_i:	1.0	1.004	1.031	1.117	1.223	1.422

أي درجة تعطي أقل خطأ؟

26. من الجدول الآتي كون:

أ. تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الأولى وأحسب الخطأ.

ب. تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثانية وأحسب الخطأ.

ج. تقريب المربعات الصغرى من الدرجة الثالثة واحسب الخطأ

د. تقريب المربعات الصغرى من الصيغة be^{ax} واحسب الخطأ

ه. تقريب المربعات الصغرى من الصيغة bx^{a} واحسب الخطأ حيث:

x_i	y_i
4.0	102.56
4.2	113.8
4.5	130.11
4.7	142.05
5.1	167.53
5.5	195.14
5.9	224.87
6.3	256.73
6.8	299.50
7.1	326.72

التفاضل العددي

Numerical Differentiation

الفصل السادس

التفاضل العددي

Numerical Differentiation

مقدمة Introduction

كيف يمكن أن نسير دون المرور بالتفاضل والتكامل اللذين أصبحا كاليدين والرجلين للرياضيات التطبيقية. في الحقيقة أنها المدخل الأساس لعالم المعادلات التفاضلية والتكاملية.

والسؤال الطارئ هو (كيف لنا أن نجد مشتقة دالة أو تكاملها دون أن نعرف الدالة بل أن مجموعة من البيانات هي فقط ما متوفر لدينا؟).

نعم ما تفكر فيه صحيح. لنا أن نستخدم الصيغ التقريبية لهذه البيانات. أن متعددات الحدود التقريبية هذه هي أبسط الدوال من حيث التعامل معها في مجال الاشتقاق والتكامل.

نعم لابد من الخطأ في إيجاد قيم المشتقة والتكامل إلا أن هذا الخطأ يمكن أن يكون صغيراً جداً بحيث لا يعد خسارة مقابل سرعة إنجاز العملية.

نبدأ هذا الجزء بأن نفرق بين حالتين:

أ. عندما تكون النقاط المعطاة غير منتظمة التوزيع.

ب. عندما تكون النقاط منتظمة التوزيع.

6.1 المشتقة في حالة التوزيع غير المنتظم

Non-Uniformaly Distributed Nodes

إن متعددة حدود لاكرانج ستكون هي الصيغة المستخدمة لتقريب البيانات الجدولة غير المنتظمة التوزيع.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (1)$$

وعليه لإيجاد المشتقة فإنا إما أن نجري الاشتقاق على الصيغة (1) مباشرة أو أن نستخلص الصيغة العامة للحدودية.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (2)$$

ثم نجري الاشتقاق. في كلتا الحالتين فإننا نحصل على حدودية من الدرجة (n-1) وتكون صيغة المشتقة.

$$P_n'(x) = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}$$

مثال (1): جد المشتقة للبيانات في الجدول المرفق عند النقطة $x = 3$.

الجدول (6)

x	1	2	4
f(x)	-2	8	112

الحل:

بتطبيق صيغة لاكرانج نحصل على حدودية من الدرجة الثانية

$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{2} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$= -2\,\frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} + 8\frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} + 112\frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$

يمكن أن نجد المشتقة عند هذه المرحلة فتكون

$$P_2'(x) = -2\,\frac{(x-2)+(x-4)}{3} + 8\frac{(x-1)+(x-4)}{-2} + 112\frac{(x-1)+(x-2)}{6}$$

وعند $x = 3$ فإن

$$P_2'(x)\big|_{x=3} = \frac{-2}{3}(1-1) + \frac{8}{-2}(2-1) + \frac{112}{6}(2+1)$$

$$= -4 + 56 = 52$$

مقارنة مع القيمة الحقيقية حيث ان البيانات في الجدول تمثل الدالة

$$f(x) = 2x^3 - 4x$$

و

$$f'(x) = 6x^2 - 4$$

وعند $x = 3$

$$f'(x)|_{x=3} = 50$$

الخطأ المطلق هو 2 والخطأ النسبي هو 0.04، لا بأس به.

6.2 المشتقة في حالة التوزيع المنتظم Uniformaly Distributed Nodes

حينما تكون البيانات في الجدول منتظمة التوزيع (وطبعاً عندما تكون الدالة معلومة فإننا سوف نختار نقاط منتظمة التوزيع لسهولتها) فإننا حتماً سنختار الحدودية المناسبة الا وهي حدودية نيوتن للفروقات المنتهية.

$$P_n(x) = f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots \qquad (3)$$

ولأجل إيجاد مشتقة الحدودية بالنسبة إلى x فإننا لابد أن نشتق الجهة اليمنى من (3) بطريقة السلسلة، إذ ان

$$P_n(x) = F(m)$$

وأن

$$m = \frac{x - x_0}{h}$$

ولذا فإن

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = \frac{dF(m)}{dm} \cdot \frac{dm}{dx}$$

$$= \frac{dF(m)}{dm} \cdot \frac{1}{h}$$

∴ فإن

$$P'_n(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 + \frac{2m-1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{3m^2 - 6m + 2}{6}\Delta^3 f_0 + \dots\right) \qquad (4)$$

أن مشتقة مفكوك m تتعقد تدريجياً بزيادة عدد الحدود لكن بجعل $m = 0$ أي ان نختار x_0 بحيث تكون قيمة $m = 0$ تتبسط الحالة كثيراً حيث تكون

$$P'_n(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 f_0 + \dots\right) \qquad (5)$$

مثال (2): [1]

في الجدول الآتي جد قيمة المشتقة عند $x = 1$ ، $x = 2$.

x	1	2	3	4	5
f(x)	3	7	23	57	115

ثم قارن النتيجة عندما تكون الدالة:

$$f(x) = x^3 - 3x + 5$$

الحل:

نكون جدول الفروقات:

x	f(x)	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
1	3				
2	7	4	12		
3	23	16	18	6	0
4	57	34	24	6	
5	115	58			

واضح أن $h = 1$. سنستخدم كل المعلومات المتاحة، أي متعددة حدود من الدرجة الثالثة.

$$P_3'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{2m-1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{3m^2 - 6m + 2}{6}\Delta^3 f_0 + \dots\right)$$

عند $x = 1$ وبوضع $x_0 = 1$ فإن $m = 0$

$$P_3'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0\right)$$

$$= P_3'(x)|_{x=3} = 0$$

وهي مطابقة للقيمة الحقيقية.

وعند $x = 2$، وباختيار $x_0 = 1$ فإن $m = 1$

ومن (4) نحصل على

$$P_3'(x)|_{x=2}=\frac{1}{1}\left(4+\frac{2(1)-1}{2}12+\frac{3(1^2)-6(1)+2}{6}6\right)$$

$$=4+6-1=9$$

أما في حالة اختيار $x_0 = 2$ فإن $m = 0$ وأن

$$P_3'(x)|_{x=2}=\frac{1}{1}\left(16-\frac{1}{2}18+\frac{1}{3}6\right)=9$$

وهي مطابقة للحالة الأولى ومطابقة للقيمة الحقيقية.

إن هذا التطابق جاء نتيجة لكون الجدول المعطى يمثل حدودية تكعيبية، والحدودية التقريبية هي تكعيبية أيضاً. ولذلك نقول أن ليس كل الحالات بهذه المثالية، بل لابد من أن يكون هناك خطأ خاصة عندما لا تكون البيانات المعطاة تمثل حدودية.

مثال (3): [8]

من الجدول المرفق قدر المشتقة عند النقطة $x = 1.7$ مستخدماً حداً واحداً من الصيغة (5) ثم حدين ثم ثلاثة ثم أربعة حدود.

x	1.3	1.5	1.7	1.9	2.1	2.3	2.5
f(x)	3.669	4.482	5.474	6.686	8.166	9.974	12.182

الحل:

نكون جدول الفروقات، وبما أن أقصى عدد من الحدود المطلوبة هو أربعة فإننا سوف نكتفي بعمود الفروقات الرابعة.

x	f (x)	Δ f	Δ^2 f	Δ^3 f	Δ^4 f
1.3	3.669				
		0.813			
1.5	4.482		0.179		
		0.992		0.041	
1.7	5.474		0.220		0.007
		1.212		0.048	
1.9	6.686		0.268		0.012
		1.480		0.060	
2.1	8.166		3.28		0.012
		1.808		0.072	
2.3	9.974		0.400		
		2.208			
2.5	12.182				

نختار x_0 لتكون هي نفس النقطة المطلوبة وبذلك تكون $m = 0$ وعليه فإن الصيغة المستخدمة هي

$$P'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 + ...\right)$$

فلحد واحد نحصل على:

$$P_1'(1.7) = \frac{1}{0.2}(1.212) = 6.060$$

ولحدين:

$$P_2'(1.7) = \frac{1}{0.2}\left(1.212 - \frac{1}{2}(0.268)\right)$$

$$= 6.060 - \frac{1}{2(0.2)}(0.268) = 5.390$$

ولثلاثة حدود:

$$P_3'\ (1.7) = 5.390 + \frac{1}{3(0.2)}(0.060) = 5.490$$

ولأربعة حدود

$$P_4'(1.7) = 5.490 - \frac{1}{4(0.2)}(0.012) = 5.475$$

وإذا علمت أن البيانات في الجدول تمثل قيم الدالة e^x فلك أن تقدر دقة النتائج.

6.3 صيغة الخطأ Error Formula

في الفصل الخامس وجدنا صيغة للخطأ في متعددة الحدود التقريبية. ولنأخذ الصيغة (27) كمرجع.

بما أن الفرق بين الدالة f ومتعددة الحدود التقريبية P_n هو ما يسمى بالخطأ E. فإن:

$$f - P_n = E$$

وبحسب خواص المشتقات فإن

$$f' - P'_n = E'$$

أي أن الخطأ في المشتقة التقريبية يساوي مشتقة الخطأ في معددة الحدود التقريبية المستخدمة.

وبالعودة إلى ما جاء في الفصل الخامس ومن الصيغة (27)

$$f - P = \binom{m}{n+1} h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi(x))$$

فإن اشتقاقها بالنسبة إلى x يعطي:

$$E(P') = f' - P'$$

$$= \binom{m}{n+1} h^{n+1} \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi(x)) + h^{n+1} f^{(n+1)}(\xi(x)) \left(\frac{d}{dm} \binom{m}{n+1} \right) \frac{1}{h} \qquad (6)$$

أن الحد الأول من هذه النتيجة لا يمكن تقييمه لأن $\frac{d}{d_x} f^{(n+1)}(\xi(x))$. لا يمكن معرفتها لمجهولية ξ. لكن بجعل $m = 0$ فإن هذا الحد يختفي. أما الحد الثاني فبسهولة يمكن إدراك أن

$$h^{(n+1)} f^{(n-1)}(\xi(x)) \left(\frac{d}{dm} \binom{m}{n+1} \right) \frac{1}{h} = \frac{(-1)^n}{n+1} h^n f^{(n+1)}(\xi(x)) \qquad (7)$$

ولحسن الحظ فإن هذه النتيجة لا تعتمد على m أكانت صفراً أم لا. لكن هذه ليست مفرحة لأن ذلك يعني أن الخطأ في المشتقة لن يزول مهما كانت m، ومن الصيغة الأخيرة نلاحظ أن الخطأ لا يساوي صفراً إلا إذا كانت $h = 0$ أو $f^{(n+1)}(\xi(x)) = 0$. وهذا ما لا يحصل في صيغة الخطأ لمتعددة الحدود، إذ أنه يمكن أن يزول عندما تكون $m = 0$. إضافة لذلك فإن رتبة h قد انخفضت من $n + 1$ في خطأ الحدودية إلى n في خطأ المشتقة، أي أن الخطأ يزداد عند المشتقة.

وبالعودة إلى المثال (3) للمقارنة بين الخطأ الفعلي Er والخطأ النظري Et نجد ان في حالة حد واحد. حيث $n = 1$ يكون

$$E_t = \frac{(-1)}{1+1} h^1 f^{(2)}(\xi(x)) \qquad , \qquad 1.7<\xi<1.9$$

$$= \frac{1}{2}(0.2)e^{\xi} \qquad , \qquad 1.7<\xi<1.9$$

$$= \begin{cases} -0.547 & \text{الاصغر} \\ -0.669 & \text{الاكبر} \end{cases}$$

بينما الخطأ الفعلي

$$Er = x - x^* = 5.474 - 6.060 = -0586$$

وهو يحقق الخطأ المتوقع.

أما عندما $n = 2$ فإن:

$$E_t = \frac{(-1)^2}{2+1} h^2 f^{(3)}(\xi(x)), \qquad 1.7<\xi<2.1$$

$$= \frac{1}{3}(0.2)^2 e^{\xi} \qquad , \qquad 1.7<\xi<2.1$$

$$= \begin{cases} 0.073 & \text{الاصغر} \\ 0.109 & \text{الاكبر} \end{cases}$$

بينما

$$Er = 5.474 - 5.390 = 0.084$$

كذلك يحقق الخطأ المتوقع.

وفي حالة $n = 3$

$$E_t = \frac{(-1)^3}{4} h^3 f^{(4)}(\xi(x)) = \frac{-1}{4}(0.2)^3 \ e^{\xi} \quad , \qquad 1.7 < \xi < 2.3$$

$$= \begin{cases} -0.011 & \text{الأصغر} \\ -0.020 & \text{الأكبر} \end{cases}$$

والخطأ الفعلي

$$Er = 5.474 - 5.490 = -0.16$$

مرة أخرى يتحقق الخطأ المتوقع.

أما عندما $n = 4$ فإن

$$E_t = \frac{(-1)^4}{5} h^4 f^{(5)}(\xi(x)) \quad , \qquad 1.7 < \xi < 2.5$$

$$= \begin{cases} 0.002 & \text{الاصغر} \\ 0.004 & \text{الاكبر} \end{cases}$$

والخطأ الفعلي هو

$$Er = 5.474 - 5.475 = -0.001$$

ولا يتفق مع المتوقع!. يعزى سبب هذا الاختلاف إلى أن خطأ التدوير في الجدول قد تطور بحيث أن العمود الرابع من الفروقات يحتوي قيمتين متساويتين! أي أن المنحنى بدأ يتصرف وكأنه حدودية من الدرجة الرابعة في الفترة (2.5 و 1.5).

6.4 مشتقات من رتب اعلى Higher Derivative Formule

يمكن إيجاد صيغ للمشتقات العليا ذلك باشتقاق الصيغة (4) حيث:

$$f''(x) \approx P''_n(x)$$

وبما أن $P_n(x)$ معطى بدلالة m أي إن:

$$P_n(x) = F(m)$$

وكما سبق لاحظنا أن

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dF}{dx}$$

$$= \frac{dF}{dm} \cdot \frac{dm}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dF}{dm}$$

مرة أخرى نشتق فينتج

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{h}\frac{dF}{dm}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{d^2F}{dx^2} \cdot \frac{dm}{dx}\right) = \frac{1}{h^2}\frac{d^2F}{dm^2}$$

∴ تصبح صيغة المشتقة الثانية

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_0 + (m-1)\Delta^3 f_0 + \ldots\right) \quad (8)$$

وبجعل $m = 0$ تصبح

$$f''(x) \approx \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 f_0 - \frac{5}{6}\Delta^5 f_0 + \ldots\right) \quad (9)$$

لنأخذ المثال (3) ولنجد المشتقة الثانية عند $x = 1.7$ وباستخدام حدين من الصيغة (9) يكون

$$P''(x) = \frac{1}{(0.2)^2}\left(\Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0\right)$$

$$P''(1.7) = \frac{1}{0.04}(0.268 - 0.060) = 5.200$$

حيث مقدار الخطأ المتوقع

$$E(P''(1.7)) = \frac{1}{h^2}\left(\frac{11}{12}\Delta^4 f_0\right)$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\frac{11}{12}h^4 f^{(4)}(\xi(x))\right)$$

$$= \begin{cases} 0.201 & \text{الاصغر} \\ 0.298 & \text{الاكبر} \end{cases}$$

أما الخطأ الحقيقي فهو:

$$5.474 - 5.200 = 0.274$$

في حالة عدم توفر معلومات عن الدالة الحقيقية فإننا نستخدم حدوداً أكثر لتخمين قيمة المشتقة، فإذا ظهر اختلاف كبير بين القيم التخمينية في حالة زيادة عدد الحدود المستخدمة حداً واحداً فإن ذلك ينذر بالخطر ولابد من إعادة النظر في الصيغة المستخدمة.

6.5 صيغ اخرى للمشتقات Other Derivative Formule

في التطبيقات العملية للمشتقات التقريبية لا تُستخدم حدود كثيرة من الصيغ (9) أو (5) وانما تُقتصر على حد أو حدين في اسوأ الاحتمالات.

فالمشتقة الأولى (مثلاً) تصبح

$$P'(x) = \frac{1}{h}\Delta f_0 = \frac{1}{h}(f_1 - f_0) \tag{10}$$

كصيغة تقدمية، و

$$P'(x) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \tag{11}$$

كصيغة مركزية [وهي تركيب من صيغة تقدمية وصيغة تراجعية].

و

$$P'(x) = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} \tag{12}$$

وذلك باستخدام حدين من (5)

أما للمشتقة الثانية فهناك

$$P''(x) = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} \tag{13}$$

كصيغة تقدمية.

و

$$P''(x) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \tag{14}$$

كصيغة مركزية.

كل هذه الصيغ يمكن استنتاجها مع رتبة الخطأ المرافق لها من خلال نشر سلسلة تيلر للدالتين f_1 و f_{-1} حول x_0 حيث:

$$f_1 = f_0 + h\, f'_0 + \frac{h^2}{2} f''_0 + \frac{h^3}{6} f'''_0 + \dots \tag{15}$$

$$f_{-1} = f_0 - h\, f'_0 + \frac{h^2}{2} f''_0 - \frac{h^3}{6} f'''_0 + \dots \tag{16}$$

فمن (15) عند بترها بعد الحد الثاني لحصل على:

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi) = \frac{\Delta f_0}{h} + o(h) \qquad x_0 < \xi < x_1 \tag{17}$$

وهي مرادفه لـ (10). وبطرح (16) من (15) لحصل على:

$$f'_0 = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} + o(h^2) \tag{18}$$

كما أننا يمكن أن لحصل على صيغة تراجعية للمشتقة الأولى من (16) بعد بترها بعد الحد الثاني فنحصل على

$$f'_0 = \frac{f_0 - f_1}{h} + o\,(h) = \frac{\nabla f_0}{h} + o(h) \tag{19}$$

أما إذا استخدمنا نشر تيلر للدالة f_2 حول x_0 فتصبح:

$$f_2 = f_0 + 2h\, f'_0 \; \frac{(2h)^2}{2} f''_0 + \frac{(2h)^3}{6} f'''_0 \tag{20}$$

وبضرب (15) في 4 وطرح (20) منها ينتج:

$$f'_0 = \frac{-f_2 + 4f_1 - 3f_0}{2h} + o(h^2) \tag{21}$$

بنفس الأسلوب يمكن الحصول على صيغ مختلفة للمشتقة الثانية، منها الصيغة المركزية:

$$f_0'' = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} + o(h^2) \quad (22)$$

والتي يمكن الحصول عليها بجمع المعادلتين (15) و (16) لغاية الحد الثالث.
صيغة التقدمية

$$f_0'' = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2} + o(h) = \frac{\Delta^2 f_0}{h^2} + o(h) \quad (23)$$

الحاصلة من ضرب (15) في 2 وطرحها من (20).

من الواضح أن الصيغ أعلاه تعتمد في دقتها على h، فكلما صغرت h كلما تضائل
.ار الخطأ. لكن الحياة ليست بهذه الدرجة من المثالية فيجب أن لا ننسى خطأ التدوير!

ل (4): [6]

الجدول التالي يمثل قيم للدالة $f(x) = x e^x$.

جدول (1)

x	f(x)
1.8	10.889365
1.9	12.703199
2.0	14.778112
2.1	17.148957
2.2	19.855030

اوجد تقريباً للمشتقة الثانية $f''(2.0)$، علماً أن القيمة الحقيقية لها هي
$f''(2.0) = 29.5562244$

ل:

باستخدام الصيغة (22) حيث صيغة الخطأ لها هي $\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$ وأن
$x_0 - h < \xi < x_0 +$

ولنفرض أننا اخترنا $h = 0.1$ فإن

$$f''(2) \approx \frac{1}{(0.1)^2}[f(2.1) - 2f(2) - f(1.9)] = 29.5931861$$

وعندما نختار $h = 0.2$ فإن

$$f''(2) \approx \frac{1}{(0.2)^2}\left[f(2.2) - 2f(2) + f(1.8)\right] = 29.7042648$$

الخطأ في الحالة الأولى تقريباً 0.037-.

وفي الحالة الثانية تقريباً 0.148-.

لننظر إلى المعادلة (18) حيث صيغة الخطأ فيها هي

$$x_0 - h < \xi < x_0 + h \qquad , \qquad -\frac{h^2}{6} f(\xi)$$

أي:

$$f_0' = \frac{1}{2h}\left[f(x_0 + h) - f(x_0 - h)\right] - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)$$

وبفرض أننا ارتكبنا خطأ تدوير $e(x_0 + h)$ و $e(x_0 - h)$ في قيم كل من $f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h)$ على الترتيب بحيث أصبحت القيم المحسوبة $\tilde{f}(x_0 + h)$ و $\tilde{f}(x_0 - h)$ أي أن:

$$f(x_0 + h) = \tilde{f}(x_0 + h) + e(x_0 + h)$$

$$f(x_0 - h) = \tilde{f}(x_0 - h) + e(x_0 - h)$$

∴ فإن خطأ التقريب يكون

$$f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 + h)}{2h} = \frac{e(x_0 + h) - e(x - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} - f^{(3)}(\xi)$$

ويحتوي جزءاً منه خطأ التدوير والجزء الآخر خطأ البتر. فإذا فرضنا أن أخطاء التدوير $e(x_0 \mp h)$ لا يتجاوز قيمة معينة $\varepsilon > 0$ وأن قيمة المشتقة الثالثة للدالة f محددة بقيمة $M > 0$، فإن:

$$\left| f'(x_0) - \frac{\tilde{f}(x_0 + h) - \tilde{f}(x_0 - h)}{2h} \right| \le \frac{\varepsilon}{h} + \frac{h^2}{6} M$$

فإذا كانت h صغيرة فإن ε / h يمكن أن تكون كبيرة. لذا فإنه في التطبيق نادراً ما تُستخدم h صغيرة جداً لأن ذلك يجعل خطأ التدوير كبيراً.

مثال (5):

لنأخذ مثلاً الدالة $f(x) = e^{-x}$ ولنقرب المشتقة بالصيغة التقدمية (17)

ولنفرض أننا أردنا تقدير قيمة $f'(1)$

∴ تكون $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + h$ وأن $f''(x) = e^{-x} \le e^{-1}$ على الفترة $(1, 1 + h)$

وبالتالي فإن خطأ القطع سوف لن يزيد على $(he^{-1})/2$.

نلاحظ من الجدول أدناه (جدول (2)) سلوك الخطأ الحقيقي في العمود الأخير.

لاحظ كيف يبدأ الخطأ يتناقص مع تناقص h بدءاً من $h = 1$ حتى $h = 0.002$ وبعدها وعند $h = 0.0002$ ازداد الخطأ بأكثر من تسعة أضعاف.

جدول (2)

h	f_0	f_1	$(f_1 - f_0)/h$	$(he^{-1})/2$	الخطأ الحقيقي
1	0.36789	0.135335	- 0.232544	0.183940	0.135335
0.2	0.367879	0.301194	- 0.333425	0.36788	.0344540
0.1	0.367879	0.332871	- 0.350080	0.018394	0.017799
0.02	0.367879	0.360595	- 0.364200	0.003679	0.003679
0.01	0.367879	0.364219	- 0.366000	0.001839	0.001879
0.002	0.367879	0.367144	- 0.367500	0.000368	0.000379
0.001	0.367879	0.367512	- 0.367000	0.000187	0.000879
0.0002	0.367879	0.367806	- 0.365000	0.000037	0.002879

تمارين

1. الدالة في الجدول أدناه هي $(\log x + 1)$، قدر $d(1 + \log x)/dx$ عند $x = 0.15$، $x = 0.19$، $x = 0.23$ ذلك باستخدام أ- حد واحد، ب- حدين، حـ- ثلاثة حدود. ثم حدد الخطأ المتوقع في كل حالة وقارنه بالخطأ الفعلي.

x	0.15	0.17	0.19	0.21	0.23	0.25	0.27	0.29	0.31
1+ logx	0.1761	0.2304	0.2788	0.3222	0.3617	0.3979	0.4314	0.4624	0.4914

2. إذا أردنا أن نقدر المشتقة للدالة $(1 + \log x)$ عند النقطة 0.31 كما في السؤال الأول فإن الصيغة التقدمية سوف لن تعمل. استنتج صيغة تراجعية لإيجاد المشتقة واستخدمها لتقدير $d(1 + \log x)/dx$ عند $x = 0.31$ باستخدام ثلاثة حدود.

3. استنتج صيغة للخطأ في الصيغة المستخرجة في سؤال (2).

4. البيانات الآتية تمثل الدالة $f(x) = xe^x$

x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
f(x)	3.30458260	3.98414028	4.77008571	5.6772800	6.72253365

أ. أوجد $f'(1.3)$ باستخدام الصيغة (21). ما هو مقدار الخطأ مقارنة بالخطأ الحقيقي؟

ب. أوجد $f''(1.3)$ باستخدام العلاقة (9) ولحدين مرة ولحد واحد مرة أخرى.

5. أوجد تقديراً لقيمة $f''(1)$ للدالة $f(x) = \sin 4x$ من الصيغة

$$f''(1) = \frac{1}{h^2}(f_2 - 2f_1 + f_0)$$

حيث h تأخذ القيم 0.01، 0.02، 0.03، 0.04، 0.05 مستخدماً خمسة أرقام عشرية في حساباتك.

6. الجدول التالي يمثل الوقت بالثواني والموقع بالأقدام لسيارة تتحرك على طريق مستقيم. استخدم الجدول والصيغ (12) أو (18) لتخمين السرعة عند كل ثانية في الجدول.

الزمن	0	3	5	8	10	13
المسافة	0	225	383	623	742	993

7. انشر الدالة f باستخدام حدودية تيلر من الدرجة الرابعة حول x_0 وأوجدها عند $x_0 \mp h$ و $x_0 \mp 2h$. استنتج صيغة لتقريب $f''(x_0)$ بحيث يكون حد الخطأ فيها من الرتبة (h^2).

التكامل العددي

Numerical Integration

التكامل العددي

Numerical Integration

لا حاجة إلى أن نوضح أهمية التكامل في الرياضيات التطبيقية. لكن الحاجة تكمن في معرفة كيفية أجراء التكامل على دالة غير معلومة إلا عند عدد معين من النقاط، أو في حالة كون الدالة من التعقيد بحيث لا يمكن إيجاد تكاملها بالطرق التحليلية التقليدية. في هذه الأحوال نلجأ إلى الطرق العددية. لكن ليس عند هذه الأحوال فقط بل حتى في حالات كون الدالة يمكن إيجاد تكاملها بسهولة فإننا نحتاج إلى إيجاد تكاملها بالطرق العددية لسرعة وسهولة العمل ودقة الناتج.

7.1 قواعد اولية Basic Rules

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $[a, b]$ ومتصلة. ويراد إيجاد التكامل $\int_b^a f(x)\,dx$ بصورة تقريبية.

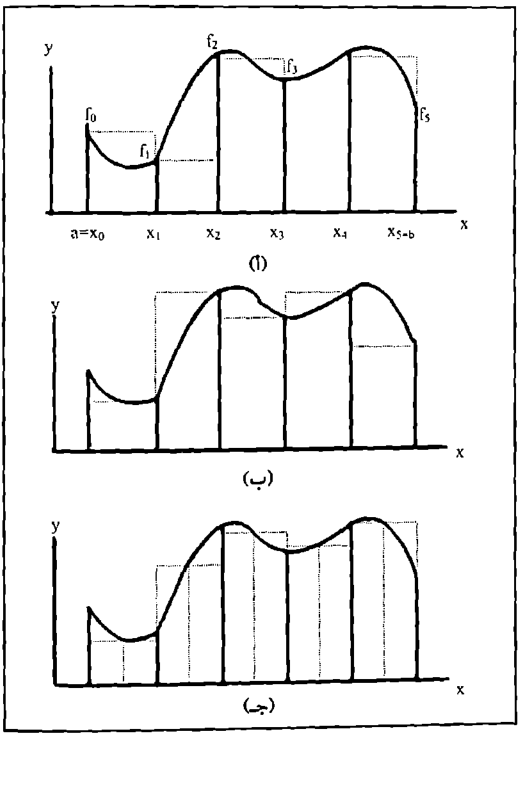
نقسم الفترة $[a, b]$ إلى فترات جزئية متساوية ولتكن نقاط التجزئة.

$a = x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = b$

نقيم مستقيمات موازية للمحور y من أولاء النقاط فتقطع المنحنى $f(x)$.

نكون مستطيلات بحيث تكون قواعدها $x_{i+1} - x_i$ وارتفاعاتها $f(x_i)$ لكل $i = 0, 1, \ldots, 4$ نحسب مجموع مساحات هذه المستطيلات فتعطينا قيمة تقريبية للمساحة تحت المنحنى. اي أن:

$$A = \sum_{i=0}^{4} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$



y
f_0
f_1
f_2
f_3
f_5
x
$a=x_0$
x_1
x_2
x_3
x_4
$x_{5=b}$
(أ)
y
x
(ب)
y
x
(جـ)

يمكن كذلك حساب مساحات المستطيلات باعتبار ارتفاعاتها $f(x_i)$ حيث $i=1,2,\ldots,5$ شكل (7.1، ب)

$$A = \sum_{i=1}^{5} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

والاختيار الآخر هو أن نعتبر ارتفاع كل مستطيل هو قيمة الدالة عند نقطة منتصف القاعدة له.

(شكل 7.1 جـ). اي أن:

$$A = \sum_{i=0}^{4} f\frac{(x_i + x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

7.2 استخدام حدودية لكرانج Using Lagrang Polynomials

عندما تكون النقاط المعطاة في الجدول غير منتظمة التوزيع، ما علينا إلا أن نكون حدودية لكرانج على النقاط المراد إجراء التكامل عندها ونضع الحدودية بالصيغة العامة:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad (1)$$

عندئذ نجري التكامل على هذه الحدودية حيث

$$\int_a^b P_n(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i x^{i+1}}{i+1} \Big|_a^b \qquad (2)$$

بالتأكيد يمكن أن نجري التكامل على صيغة لكرانج قبل الوصول إلى الصيغة (1). لكنها تكون معقدة بعض الشيء خاصة عندما تزيد n على 2.

مثال (1):

نفرض لدينا الجدول

x	0	1	3
f(x)	-2	7	49

مطلوب إيجاد التكامل على الدالة f (x) من x = 0 إلى x = 3.

الحل:

بما أن النقاط غير موزعة بانتظام فإننا نستخدم حدودية لكرانج.

$$P_2(x) = -2\,\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} + 7\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} + 49\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}$$

$$\therefore \quad = 4x^2 + 5x - 2$$

$$\int_0^3 P_2(x)\,dx = \int_0^3 (4x^2 + 5x - 2)\,dx$$

$$\int_0^3 P_2(x)\,dx = 52.5$$

إذا علمت أن الدالة في الجدول هي بالحقيقة.

$$f(x) = x^3 + 8x - 2$$

فإن

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 57$$

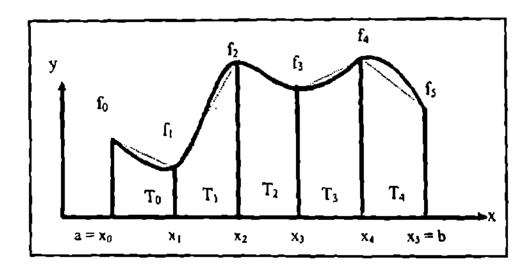
وأن الخطأ النسبي في القيمة التقريبية للتكامل هي

$$\delta = 0.08$$

7.3 قاعدة شبه المنحرف The Trapezoidal Rule

في الجزء (7.1) كانت الطرق المذكورة تحمل خطأ كبيراً في قيمة التكامل التقريبية. يمكن تقليص مقدار الخطأ بزيادة عدد الفترات الجزئية إلا انه يبقى ملحوظاً.

أن صيغة شبه المنحرف يمكن أن تحسن من الحالة فبدلاًمن إنشاء مستطيلات على كل فترة جزئية سنقيم أشباه منحرفات كما في الشكل (7.2).



شكل (7.2)

معلوم أن مساحة شبه المنحرف هي نصف حاصل ضرب مجموع القاعدتين في الارتفاع، وبالتالي فإن مساحة شبه المنحرف الأول T_0 ستكون

$$T_0 = (x_1 - x_0)\left(\frac{f_0 + f_1}{2}\right)$$

كذلك

$$T_1 = (x2 - x1)\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)$$

وهكذا فإن مجموع مساحات أشباه المنحرفات سيعطي تقريباً للمساحة تحت المنحنى. بالتأكيد سيكون هناك فرق بين المساحتين. يمكن، بالحقيقة، جعل هذا الفرق يتضائل تدريجياً بجعل النقاط x_i متقاربة أكثر. بعبارة أخرى أن تصغر المسافة بين x_i، x_{i+1} وبنفس الوقت نزيد من عدد النقاط وهذا يعني زيادة عدد أشباه المنحرفات وطبعاً ذلك يؤدي إلى زيادة في العمليات الحسابية.

فلو جزأنا الفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية $[x_i, x_{i+1}]$ حيث $a = x_0$ وأن $x_{i+1} - x_i = h$ فإن مساحة شبه المنحرف ستكون

$$T_i = h\left(\frac{f_i + f_{i+1}}{2}\right) \qquad ، \qquad i = 0, 1 \ldots, n-1 \qquad (3)$$

أما المساحة الكلية فهي

$$T_0 + T_1 + \ldots + T_n = \frac{h}{2}(f_0 + f_1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-1} + f_n)$$

$$= \frac{h}{2}\left(f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right) \qquad (4)$$

هذه الصيغة يمن أن نستجها من متعددة حدود نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية.

فلنبدأ اولاً باستنتاج صيغة شبه المنحرف البسيطة ذلك بأن نتعامل مع متعددة حدود خطية. اي ان نقطع حدودية نيوتن التقدمية بعد الحد الثاني

$$P_1(x) = f_0 + m\,\Delta f_0 \qquad (5)$$

ذلك يشمل النقطتين x_1, x_0.

وبإجراء التكامل بالنسبة لـ x على (5)

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)\,d_x = \int_{x_0}^{x_1}(f_0 + m\Delta f_0)\,dx \qquad (6)$$

فإننا لابد أن نحول متغير التكامل من x إلى m في الجهة اليمنى من (6). وحيث أن

$$m = \frac{x - x_0}{h}$$

فإن

$$dm = \frac{dx}{h}$$

او

$$dx = h\,dm$$

وتصبح حدود التكامل [0, 1] بدلاً من $[x_0, x_1]$

∴ فإن (6) ستكون

$$\int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx = h\int_0^1 (f_0 + m\Delta f_0)dm$$

$$= h\left[m f_0 + \frac{m^2}{2}(f_1 - f_0)\right]_0^1$$

$$= \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

وهي مساحة شبه المنحرف البسيطة كما في (3).

أن تقسيم فترة التكامل من $a = x_0$ إلى $b = x_n$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية يعني تطبيق الصيغة (7) n من المرات أو

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} P_1(x)\,dx$$

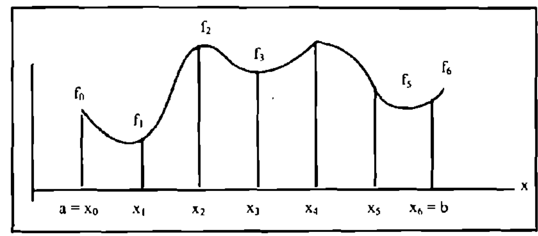
$$= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{h}{2}(f_i + f_{i+1})$$

$$= \frac{h}{2}\left(f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right) \tag{8}$$

وهي صيغة شبه المنحرف المركبة.

7.4 قاعدة سمسن Simpson's Rule

في هذه القاعدة نقرب الدالة f بحدودية تربيعية P_2، ولذلك نحتاج إلى ثلاث نقاط في الفترة الجزئية الواحدة لكي نمرر بها الحدودية التربيعية. شكل (7.3).



شكل (7.3)

نفرض أن لدينا النقاط $(x_0,f_0), (x_1,f_1), (x_2, f_2)$ حيث $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$ نكون الحدودية التربيعية من صيغة نيوتن التقدمية للفروقات المتهية.

$$P_2(x) = f_0 + m\,\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 f_0$$

وبإجراء التكامل على الفترة $[x_0, x_2]$.

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2}\left[f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 f_0\right]dx$$

وتحويل التكامل في الجهة اليمنى بدلالة m يصبح

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx = h\int_0^2\left[f_0 + m(f_1 - f_0) + \frac{m^2 - m}{2}(f_2 - 2f_1 + f_0)\right]dm$$

$$= m f_0 + \frac{m^2}{2}(f_1 - f_0) + \left(\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4}\right)(f_2 - 2f_1 + f_0)\ \Big]_0^2$$

$$= \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \qquad (9)$$

وهي صيغة سمسن البسيطة.

أما الصيغة المركبة فتنتج عندما نقسم الفترة [a, b] إلى n من الفترات الجزئية المتساوية حيث n لابد أن يكون عدد زوجي.

لتكن النقاط هي $x_1, x_2, \ldots, x_n$. بتطبيق صيغة سمسن البسيطة على المجموعات الجزئية نحصل على:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n/2} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P_2(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{n/2} \frac{h}{3}\left(f_{2i-2} + 4f_{2i-1} + f_{2i}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \ldots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} f_{2i} + 4\sum_{i=1}^{n/2} f_{2i-1}\right] \qquad (10)$$

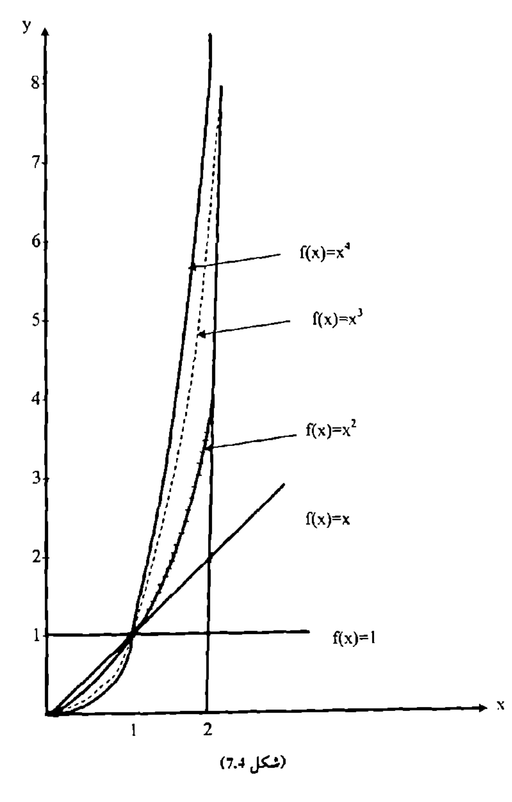
مثال (2):

قارن بين صيغتي شبه المنحرف البسيطة وسمسن البسيطة والتكامل الحقيقي للدوال $e^x, x^4, x^3, x^2, x, 1$ على الفترة [0, 2].

الحل:

في حالة صيغة شبه المنحرف البسيطة يكون طول الفترة $h = 2$.

وفي حالة صيغة سمسن البسيطة يكون طول الفترة $h = 1$.



(شكل 7.4)

جدول (1)

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
شبه المنحرف	2	2	4	8	16	8.389
سمسن	2	2	2.67	4	6.67	6.421
تكامل حقيقي	2	2	2.67	4	6.4	6.389

من الجدول (1) نلاحظ أن صيغة شبه المنحرف كانت موفقة بل مضبوطة لحد الدالة x بينما كانت صيغة سمسن مضبوطة لحد الدالة x^3 وكانت جيدة حتى بعد ذلك سواء عند متعددة الحدود x^4 أو الدالة الأسية e^x. ما سبب هذا الاختلاف في دقة التقريب؟

7.5 قاعدة سمسن $\frac{3}{8}$ Simpson's Rule

عندما نستخدم متعددة حدود من الدرجة الثالثة بتقريب الدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ فإننا لحتاج أربعة نقاط في هذه الفترة لتكوين هذه الحدودية، ففي صيغة نيوتن التقدمية للفروقات المنتهية وعندما $n = 3$ على نقاط موزعة بانتظام يكون

$$P_3(x) = f_0 + m\,\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{m(m-1)}{3!}\Delta^3 f_0$$

وبنفس الأسلوب السابق فإن:

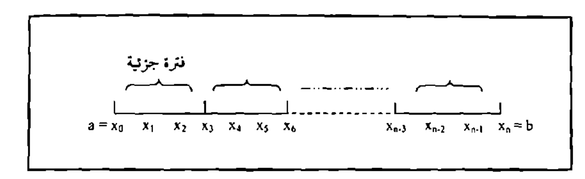
$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x)\,dx = \frac{1}{h}\int_0^3\left(f_0 + m\Delta f_0 + \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 f_0\right)dm$$

وبإجراء عملية التكامل نستنتج الصيغة

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x)\,dx = \frac{3}{8}h\;(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) \qquad (11)$$

وتسمى بصيغة سمسن $\frac{3}{8}$ البسيطة.

لأجل إيجاد الصيغة المركبة نقسم الفترة $[a, b]$ إلى n من الفترات الجزئية بحيث أن n يقبل القسمة على 3.



شكل (7.5)

فتكون الصيغة

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_3} P_3(x)dx + \int_{x_3}^{x_6} P_3(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-3}}^{x_n} P_3(x)dx$$

$$= \frac{3}{8}h\left[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3\right] + \frac{3h}{8}\left[f_3 + 3f_4 + 3f_5 + f_6\right] +$$

$$\ldots + \frac{3}{8}h\left[f_{n-3} + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f\ \right]$$

$$= \frac{3}{8}h\left[f_0 + 3\sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1}\left(f_{3i+1} + f_{3i+2}\right) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{3}-1} f_{3i} + f_n\right] \tag{12}$$

من المتوقع أن تعطي هذه الصيغة قيمة مضبوطة للتكامل على متعددات الحدود من الدرجة 4 فما دون ذلك بالأستقراء من الجدول (1). وللتأكد نعود إلى المثال (2) فنقسم الفترة [0, 2] إلى ثلاث فترات جزئية متساوية ونطبق صيغة سمسن $\frac{3}{8}$ البسيطة. في الجدول (2) مقارنة بين قيم التكامل بصيغة سمسن $\frac{3}{8}$ وقيم التكامل الحقيقي.

جدول (2)

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
سمسن $\frac{3}{8}$	2	2	$\frac{3}{8}$	4	6.519	6.403
تكامل حقيقي	2	2	$\frac{3}{8}$	4	6.4	6.389

لم يكن التوقع دقيقاً فعند الدالة x^4 لم يكن التكامل العددي مضبوطاً !!. لابد لنا من معرفة أسباب ذلك.

7.6 حساب الخطأ Error Computation

بما أننا استخدمنا متعددة حدود نيوتن التقدمية للفروقات المتهية في استنتاج صيغ التكامل التي استعرضناها فمن الطبيعي أن نعود لها في معرفة مقدار الخطأ في كل من تلك الصيغ. ففي صيغة شبه المنحرف البسيطة حيث قطعنا حدودية نيوتن بعد الحد الثاني.

$$P_1(x) = f_0 + m\,\Delta f_0$$

فإن قيمة التكامل على الحد الثالث يعطينا قيمة الخطأ في التكامل بواسطة قاعدة شبه المنحرف البسيطة. أي أن:

$$E_1 = h\int_0^1 \frac{m(m-1)}{2!}\Delta^2 f_0\,dm$$

$$= -\frac{h}{12}\Delta^2 f_0 \qquad (13)$$

ولأجل الحصول على صيغة خطأ لا تعتمد على مؤثر الفرق فإننا نستعيد المعادلة (23) من الفصل السادس حيث بإهمال حد الخطأ منها نحصل على

$$x_i < \xi < x_{i+1} \quad , \Delta^2 f_i \approx h^2 f''(\xi_i) \qquad (14)$$

وعليه فإن:

$$E_t \approx -\frac{h^3}{12} f''(\xi) \qquad (15)$$

حيث $x_i < \xi < x_{i+1}$

ان وجود المشتقة الثانية للدالة في الصيغة أعلاه يفسر لنا سبب أن صيغة شبه المنحرف تحقق تكامل مضبوط للدالة f عندما تكون عبارة عن متعددة حدود من الدرجة الأولى وليس أكثر من ذلك.

للصيغة المركبة فإن الخطأ E_T هو مجموع الأخطاء في كل فترة جزئية يعني لعدد n من الفترات الجزئية فإن:

$$E_T = -\frac{h^3}{12}\left[f''(\xi_1) + f''(\xi_2) + ... + f''(\xi_n)\right] \tag{16}$$

حيث كل من $\xi_i\ i_{i=1}^{n}$ هي موجودة في الفترة الكاملة $[a, b]$. فإذا فرضنا ان $f''(x)$ متصلة على (a, b) فإنه توجد نقطة x في (a, b)، ولنكن $x = \eta$ ، عندها يكون المجموع بين القوسين في (16) يساوي $n\,f''(\xi)$.

يعني

$$x_0 < \eta < x_n,\ E_T = n\left(-\frac{h^3}{12}f''(\eta)\right)$$

ولأن

$$n = \frac{b-a}{h}$$

فإن

$$E_T = -\frac{(b-a)h^2}{12}f''(\eta) \tag{17}$$

حيث $a < \eta < b$.

لاحظ أن رتبة h قد انخفضت.

وفيما يخص قاعدة سمسن البسيطة فإننا نكامل الحد الرابع من حدودية نيوتن التقدميه على الفترة $[x_0, x_2]$.

$$E_t = \int_{x_0}^{x_2}\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 f_0 dx = h\int_0^2\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\Delta^3 f_0 dm$$
$$= 0$$

هذه النتيجة تدفعنا إلى الانتقال إلى الحد الخامس من حدودية نيوتن لأنه من غير المعقول أن تكون صيغة سمسن بدون خطأ إذن

$$E_t = h\int_0^2\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 f_0\, dm$$
$$= \frac{-h}{90}\Delta^4 f_0 \tag{18}$$

وكما في (14) فإن:

$$\Delta^4 f_i \approx h^4 f^{(iv)}(\xi_i) \qquad (19)$$

حيث $x_i < \xi_i < x_{i+2}$

∴ يكون

$$E_i = \frac{-h^5}{90} f^{(iv)}(\xi_i) \qquad , \quad x_i < \xi_i < x_{i+2} \qquad (20)$$

قارن مع (15).

ان المشتقة الرابعة للدالة f تفسر كون صيغة سمسن تعطي تكامل مضبوط لمتعددات حدود من الدرجة الثالثة فما دون، إما وجود h^5 فإنه يعني رفع رتبة الخطأ من $o(h^3)$ في صيغة شبه المنحرف البسيطة إلى $o(h^5)$. فبوضع $0 < h < 1$ يمكن تصور الانخفاض كبير في مقدار الخطأ من صيغة شبه المنحرف البسيطة إلى صيغة سمسن البسيطة.

أما لصيغة سمسن المركبة فإننا نقسم الفترة [a, b] إلى n من الفترات الجزئية حيث n عدد زوجي وبما أن كل زوج من الفترات الجزئية تعطي صيغة واحدة بسيطة لسمسن فإن مقدار الخطأ الكلي على [a, b] هو مقدار الخطأ في سمسن البسيطة مضروباً بـ $\frac{n}{2}$ أي أن:

$$E_T = \frac{-h^5}{90}\left[f^{(iv)}(\xi_1) + f^{(iv)}(\xi_2) + \ldots + f^{(iv)}(\xi_{n-2})\right] \qquad (21)$$

حيث ان كل من ξ_i تكون موجودة في الفترة الكاملة [a, b]. فإذا فرضنا أن $f^{iv}(x)$ متصلة على (a, b) فإنه توجد نقطة x في (a, b)، ولتكن $x = \eta$ عندها يكون المجموع بين القوسين في (21) يساوي $n f^{(iv)}(\eta)$.

$$E_T = \frac{n}{2}\left(-\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\eta)\right)$$

حيث $x_0 < \eta < x_n$

$$= \frac{-(b-a)h^4}{180} f^{(iv)}(\eta) \qquad (22)$$

حيث $x_0 < \eta < x_n$

وبالانتقال إلى قاعدة سمسن $\frac{3}{8}$ فإننا لمجري التكامل للحد الخامس من صيغة نيوتن التقدمية للفروقات المتهية وعلى الفترة $[x_0, x_3]$.

$$E_t = \int_{x_0}^{x_3} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}\Delta^4 f_0 dx$$

$$= h\int_0^3 \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{x4}\Delta^4 f_0 dm$$

$$= \frac{-3}{80} h\Delta^4 f_0$$

ولأن

$$x_0 < \xi_1 < x_3 \quad , \quad \Delta^4 f_0 \approx h^4 f^{(Iv)}(\xi_1)$$

فإن:

$$x_0 < \xi_1 < x_3 \qquad , \quad E_T = \frac{-3}{80} h^5 f^{(Iv)}(\xi_1) \tag{23}$$

نفس مواصفات الصيغة (20) بل أن المعامل في (20)، $\left(\frac{-1}{90}\right)$، أقل منه في (23)، $\left(\frac{-3}{80}\right)$.

أما للصيغة المركبة لسمسن $\frac{3}{8}$ فأن

$$E_T = \frac{-3h^5}{80}[f^{(Iv)}(\xi_1) + f^{(Iv)}(\xi_2) + \dots f^{(Iv)}(\xi_{n/3})] \tag{24}$$

حيث كل من ξ_i في فترة التكامل الكلية $[a, b]$. فبفرض أن $f^{(Iv)}(x)$ متصلة على (a, b) فإنه توجد نقطة x في (a, b)، لتكن $\eta = x$، عندها يكون المجموع بين القوسين في (24) يساوي $\frac{n}{3} f^{(iv)}(\eta)$.

$$E_T = \frac{-3}{80} h^5 \left(\frac{n}{3} f^{(Iv)}(\eta)\right)$$

ولأنه

$$n = \frac{b-a}{h}$$

يكون

$$E_T = \frac{-(b-a)}{80} h^4 f^{(iv)}(\eta) \qquad (25)$$

∴ فإن وجود المشتقة الرابعة للدالة f يفسر لنا سبب وقوع خطأ في تكامل الدالة x^4، جدول (2) ولكنها أدق قليلاً من الصيغة (24) لماذا؟

وهذا ينطبق أيضاً على الدالة e^x!.

7.7 تحديد طول الفترة الجزئية Determining the Length of h

إن تحديد طول الفترة الجزئية h وبالتالي عدد الفترات الجزئية n يساعد في تقييم كمية الحسابات اللازمة لإجراء التكامل المطلوب. فمن معرفة مقدار خطأ البتر في قاعدة شبه المنحرف أو سمسن نستطيع أن نحدد طول الفترة الجزئية (h) (أو عدد الفترات الجزئية n) اللازمة لتحقيق الدقة المطلوبة في التكامل.

ففي قاعدة شبه المنحرف كان مقدار الخطأ المحلي (للفترة الجزئية الواحدة) (Local Truncation Error) هو $-\frac{h^3}{12} f''(\xi_i)$ ومقدار الخطأ الكلي (للفترة الكاملة [a, b]) (Global Truncation Error) هو:

$$-\frac{n h^3}{12} f''(\eta) = \frac{-(b-a)^3}{12 n^2} f''(\eta)$$

نفرض أن المشتقة الثانية للدالة f محدودة، فإنه يوجد عدد M بحيث

$$|f''(\eta)| \le M$$

وعلى فرض أن المطلوب هو إيجاد تكامل f (I (f)) بخطأ لا يتجاوز ε فإن ذلك يعني.

$$\left| \frac{(b-a)^3}{12 n^2} f''(\eta) \right| \le \varepsilon$$

أو

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M \le \varepsilon$$

ذلك يعني:

$$n \ge \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}} \qquad (26)$$

أما في حالة سمـــن $\frac{1}{3}$ فإن مقدار الخطأ الكلي هو

$$|E| = \left|\frac{-(b-a)}{180} h^4 f^{(iv)}(\eta)\right|$$

$$= \left|-\frac{(b-a)^5}{180 n^5} f^{iv}(\eta)\right|$$

وبفرض أن المشتقة الرابعة للدالة f محددة، فإنه يوجد عدد L بحيث

$$|E| = \frac{(b-a)^5 L}{180 n^4} \le \varepsilon$$

إذن فإن:

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5 L}{180\varepsilon}} \qquad (27)$$

مثال (3): [6]

لإيجاد قيمة التكامل $\int_0^{\pi} \sin x\, dx$ باستخدام قاعدة سمـــن المركبة وبخطأ لا يتجاوز $\varepsilon = 2 \times 10^{-5}$ فإنه عدد الفترات اللازمة هو

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{\pi^5}{360 \times 10^{-5}}}$$

$$n \ge 17.1$$

فبوضع $n = 20$ فإن $h = \frac{\pi}{20}$

وعلى هذا المقياس نجد قيمة التكامل.

$$\int_0^{\pi} \sin\ x\, dx \approx \frac{\pi}{60}\left[2\sum_{i=1}^{9}\sin\left(\frac{i\pi}{10}\right)+4\sum_{i=1}^{10}\sin\left(\frac{(2i-1)\pi}{20}\right)\right]$$

$$=2.00000679$$

بينما باستخدام قاعدة شبه المنحرف المركبة فإن عدد الفترات اللازمة هو

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}}$$

أو

$$n \geq 360$$

أي إننا لمحتاج إلى مضاعفة العمل ثمانية عشر مرة بقدر ما كان عليه في قاعدة سمسن. ولأجل إبراز الفرق بين القاعدتين فإننا سنقوم بتطبيق قاعدة شبه المنحرف بوضع $n = 20$ أي ان $h = \frac{\pi}{20}$ فنحصل على

$$\int_0^{\pi} \sin x dx \approx \frac{\pi}{40}\left[2\sum_{i=1}^{19}\sin\left(\frac{i\pi}{20}\right)+\sin 0+\sin \pi\right]$$

$$=1.9958860$$

أي أن الخطأ المطلق يكون

$$\varepsilon = |\ 2-1.9958860\ | = 0.004114$$

مقارنة مع الخطأ المسموح به وهو 0.00002 . وهذا يعني أن الخطأ تضاعف أكثر من مائتي مرة.

<u>تعريف:</u> إن درجة الدقة لقاعدة التكامل هي العدد الصحيح الموجب n حيث الخطأ في تكامل معددة الحدود P_n من الدرجة n أو أقل يكون صفراً، $E(P_n) = 0$،

لكن الخطأ في تكامل الحدودية P_{n+1} لا يساوي صفراً $E(P_{n+1}) \neq 0$.

واستناداً إلى هذا التعريف فإن صيغة شبه المنحرف تكون لها درجة دقة واحد وكل من صيغتي سمسن وسمسن $\frac{3}{8}$ لها درجة دقة ثلاثة.

إن الصيغ المذكورة أعلاه هي من ضمن ما يسمى بصيغة نيوتن - كوتس المغلقة، حيث أن الفترة $[a, b]$ تقسم بحيث أن $x_i = x_0 + ih$ لكل $i = 0, 1, \dots, n$ وأن $x_0 = a$ و $x_n = b$ وأن $h = \frac{b-a}{n}$.

صيغة نيوتن - كوتس تفترض أن

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}\,dx$$

(لاحظ استخدام حدوديات لاكرانج في الصيغة).

كذلك هناك صيغة عامة تسمى صيغة نيوتن كوتس المفتوحة (Open Newton-Cotes).

حيث فيها نقسم الفترة $[a, b]$ كما يلي $x_i = x_0 + i\,h$ ،

$i = 0, 1, \dots, n$ وأن $h = \frac{b-a}{n+2}$ و $x_0 = a + h$ و $x_n = b - h$ وهكذا. نرمز لنقاط النهاية بـ $x_{-1} = a$ و $x_{n+1} = b$ وبذلك يصبح التكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

حيث كما في السابق

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx$$

ومن الصيغ الشهيرة لصيغة نيوتن كوتس المفتوحة

عندما $n = 0$

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\,f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi) \qquad (28)$$

$$x_{-1} < \xi < x_1$$

عندما $n = 1$

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi) \tag{29}$$

$$x_{-1} < \xi < x_2$$

عندما $n = 2$

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}\left[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)\right] + \frac{14h^5}{45} f^{(4)}(\xi) \tag{30}$$

$$x_{-1} < \xi < x_3$$

عندما $n = 3$

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{5h}{24}\left[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)\right] + \frac{95h^5}{144} f^{(4)}(\xi) \tag{31}$$

$$x_{-1} < \xi < x_4$$

أن صيغ نيوتن كوتس المفتوحة كثيراً ما تستخدم في الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية رغم أن الصيغ المغلقة تبدي دقة أعلى في التكاملات. والمثال التالي يبين ذلك.

مثال (4): [7]

باستخدام الصيغ المفتوحة (28)، (29)، (30)، (31) أعلاه والصيغ المغلقة (شبه المنحرف وصيغ سمسن وسمسن $\frac{8}{3}$ وصيغة أخرى) لتقريب التكامل

$$\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

ينتج الجدول الآتي:

جدول (3)

n =	0	1	2	3	4
صيغة مغلقة	-	0.27768018	0.29293264	0.29291070	0.29289318
خطأ	-	0.01521303	0.00003942	0.00001748	0.00000004
صيغة مفتوحة	0.30055887	0.2978754	0.29351798	0.29286923	
خطأ	0.00766565	0.00509432	0.00062477	0.00002399	

7.8 طريقة المعاملات غير المحددة Undetermined Coefficients

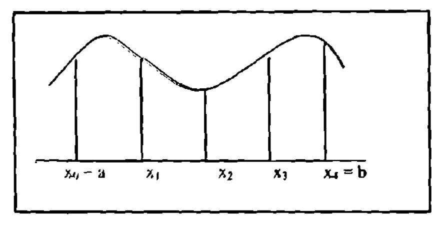
إن الصيغة العددية للتكامل تحتوي على قيم للدالة تحت التكامل وعند نقاط داخل أو قرب فترة التكامل. فلإيجاد قيمة تكامل الدالة $f(x)$ على الفترة $[a, b]$ نعلم أنه بوجود قيمة وسيطة للدالة على الفترة $[a, b]$ فإن التكامل يكون:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f_{av} \tag{32}$$

حيث f_{av} تمثل قيمة وسيطة للدالة f في الفترة $[a,b]$. ويبدو مناسباً أن نقرب هذه القيمة الوسيطة بتركيب خطي من قيم الدالة ضمن الفترة $[a, b]$. أي أن

$$\int_a^b f(x)dx = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \ldots + c_n f(x_n) \tag{33}$$

حيث c_i ثوابت يتم إيجاد قيمها. وهنا لابد أن نضع بعض الشروط على الصيغة منها أن النقاط x_i تكون موزعة بانتظام أي أن $x_{i+1} - x_i = \Delta x = h$ حيث h قيمة ثابتة كذلك أن تكون نقاط نهايات فترة التكامل b, a تنطبق على نقطتين من النقاط x_i.



شكل (7.6)

بفرض أننا أردنا أن نجد التكامل بواسطة قيمتين للدالة فقط وهما $f(a)$ و $f(b)$ أي أن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_0 f(a) + c_1 f(b) \tag{34}$$

بالتأكيد فإن قيم الثوابت c_1, c_0 تعتمد على $f(x)$ و b, a. هذه الطريقة (طريقة المعاملات غير المحددة) تعتمد على افتراض أنه يمكن أن نقرب الدالة $f(x)$ بمتعددة حدود وبذا نحدد قيم c_1, c_0 بحيث أن المعادلة (34) تكون صحيحة لكل متعددة حدود من الدرجة m أو أقل حيث m غير معلومة الآن.

وحيث أن (34) تحتوي على معاملين اثنين غير محددين، فإننا لا نتوقع أن نحصل على حدودية من درجة أعلى من الأولى. لأن ذلك يتطلب معاملات أكثر. وعليه فإننا نعتبر أن المعادلة (34) تكون مضبوطة إذا قربنا $f(x)$ بحدودية من الدرجة صفر أو الدرجة واحد. وهذا يقودنا إلى أن الصيغة تكون مفتوحة عندما $f(x) = x$ وكذلك $f(x) = 1$ كأبسط أشكال حدوديات الدرجة الأولى والدرجة صفر على الترتيب.

إذن

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b x\,dx &= c_0(a) + c_1(b)\\ \int_a^b 1\,dx &= c_0(1) + c_1(1)\end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

وبإجراء التكاملات نحصل على

$$\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = c_0\, a + c_1\, b$$

$$b - a = c_0 + c_1$$

وبحل المعادلتين بالنسبة إلى c_1, c_0 نجد أن

$$c_0 = (b - a)/2$$

$$c_1 = (b - a)/2$$

تكون صيغة التكامل

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

وهي، كما هو واضح، صيغة شبه المنحرف البسيطة.

حتماً الآن نفكر في كيفية استنتاج صيغة سمسن $\frac{1}{3}$. نعود إلى المعادلة (33) ونقتطف عن الجهة اليمنى ثلاثة حدود أي:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_0\, f(x_0) + c_1\, f(x_1) + c_2 f(x_2) \qquad (36)$$

ويفرض أن $x_0 = a$ ، $x_2 = b$ ولان النقاط x_i موزعة بانتظام فإن $x_1 = \frac{b+a}{2}$. إذن:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c_0\, f(a) + c_1\, f\left(\frac{b+a}{2}\right) + c_2 f(b) \qquad (37)$$

وهنا مرة أخرى نقرب الدالة $f(x)$ بمتعددة حدود وهذه لا يمكن أن تكون من درجة أعلى من الثانية لكي تكون الصيغة (37) مضبوطة، عليه فإن أبسط الاحتمالات للدالة $f(x)$ هي $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$، اذن:

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = c_0 a^2 + c_1\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + c_2 b^2$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = c_0 a + c_1\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + c_2 b$$

$$\int_a^b dx = b - a = c_0 + c_1 + c_2$$

وبحل المنظومة للمعاملات غير المحددة c_i نجد أن

$$c_0 = c_2 = \frac{1}{6}(b-a) \quad , \quad c_1 = \frac{4}{6}(b-a)$$

فنتنج صيغة سمسن

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right]$$

أما بالنسبة لمقدار الخطأ، فإننا سنأخذ بالتفصيل مقدار الخطأ في صيغة شبه المنحرف البسيطة. فمن نشر تيلر

$$F(x_1) = F(x_0) + F'(x_0)\,h + F''(x_0)\frac{h^2}{2} + F'''(\xi_1)\frac{h^3}{6} \qquad (38)$$

حيث $x_0 < \xi_1 < x_1$ وأن $x_1 = x_0 + h$

ضع $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ ، فيكون $F'(x) = f(x)$ ،$F''(x) = f'(x)$ ، $F'''(x) = f''(x)$

∴ تكون المعادلة (38) بالشكل

$$\int_a^{x_1} f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + h\,f(x_0) + \frac{h^2}{2} f'(x_0) + \frac{h^3}{6} f''(\xi_1)$$

او

$$\int_a^{x_1} f(x)\,dx - \int_a^{x_0} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\,f(x_0) + \frac{h^2}{2} f'(x_0) + \frac{h^3}{6} f''(\xi_1) \quad (39)$$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{h}-\frac{h}{2}f''(\xi_2) \qquad ,x_0<\xi_2<x_1$$

ينتج

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = h\,f(x_0)+\frac{h}{2}\big(f(x_1)-f(x_0)\big)-\frac{1}{4}h^3f''(\xi_2)+\frac{1}{6}h^3f''(\xi_1)$$

وبدمج الحدين الأخرين نحصل على

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}\big(f(x_0)+f(x_1)\big)-\frac{1}{12}h^3f''(\xi) \tag{40}$$

حيث $x_0<\xi<x_1$

إذن فإن الخطأ في الصيغة البسيطة لشبه المنحرف هو $O(h^3)$ ، وهو مطابق لما حصلنا عليه سابقاً.

وبنفس الأسلوب يمكن أن نستنتج صيغة الخطأ في تكامل سمسن.

7.9 تكامل رمبرك Romberg Integration

رغم أن قاعدة شبه المنحرف غير عالية الدقة إلا أنه يمكن زيادة درجة دقتها باتباع أسلوب رمبرك. ذلك بأن نطبق قاعدة شبه المنحرف المركبة باستخدام $1,2,4,8,\ldots,2^k$ من الفترات الجزئية للحصول على قيم مختلفة للتكامل

$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$

ثم نأخذ تركيبات خطية من هذه القيم لنحصل على ناتج عالي الدقة.

نظرية (7.1): [2]

لتكن f دالة متصلة معرفة على [a, b] وأن f قابلة للاشتقاق وأن مشتقاتها موجودة ومتصلة. يمكن التعبير عن قاعدة شبه المنحرف بالصيغة.

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1}f_i\right]+\sum_{j=1}^{\infty}a_jh^{2j}$$

حيث $h=\frac{b-a}{n},\ a=x_0,\ b=x_n$

$x_i = x_0 + i\,h$ ، $i = 1, 2, \dots, n-1$ وأن a_j $(j = 1, 2, \dots)$ هي قيم لا تعتمد على h.

النظرية أعلاه هي الأساس النظري الذي اعتمد عليه رومبرك. إذ انه ليس من الصعوبة كتابة α_j بصيغتها الصريحة لكنها ليست ذات أهمية. فعملية رومبرك تعتمد على إيجاد قيم مختلفة للتكامل باستخدام صيغة شبه المنحرف $T_{k,0}$ $(K = 0, 1, 2, \dots)$ فيها طول الفترة الجزئية $h_k = \frac{b-a}{2^k}$. ومن نظرية (7.1) يكون

$$I = T_{k,0} + \alpha_1\, h_k^2 + \alpha_2\, h_k^4 + \alpha_3\, h_k^6 + \dots \qquad (41)$$

فإذا نصفنا h، أي ان عدد الفترات الجزئية يتضاعف، ينتج

$$I = T_{k+1,0} + \alpha_1 \left(\frac{h_k}{2}\right)^2 + \alpha_2\left(\frac{h_k}{2}\right)^4 + \alpha_3\left(\frac{h_k}{2}\right)^6 + \dots$$

$$= T_{k+1,0} + \frac{1}{4}\alpha_1 h_k^2 + \frac{1}{16}\alpha_2 h_k^4 + \frac{1}{64}\alpha_3 h_k^6 + \dots \qquad (42)$$

الآن يمكن ان نتخلص من الحد الأول من الخطأ $O\,(h^2)$ بضرب المعادلة (42) في 4 وطرح (41) منها فينتج

$$3\,I = (4T_{k+1,0} - T_{k,0}) - \frac{3}{4}\alpha_2 h_k^4 - \frac{15}{16}\alpha_3 h_k^6 + \dots$$

$$I = \frac{1}{3}\,(4T_{k+1,0} - T_{k,0}) - \frac{1}{4}\alpha_2\, h_k^4 - \frac{5}{16}\alpha_3 h_k^6 + \dots \qquad (43)$$

وهذا هو ما يسمى بالاستكمال الأول (استكمال رمبرك الأول) ويرمز له $T_{k+1,1}$ فيه حصلنا على تقريب من الرتبة الرابعة.

نكتب المعادلة (43) بالصورة

$$I = T_{k+1} + \beta_1\, h_k^4 + \beta_2 h_k^6 + \dots \qquad (44)$$

حيث $T_{k+1,1}$ هي القيمة الجديدة للتكامل و β_i لا تعتمد على h.

نكرر العملية بتنصيف h مرة أخرى أي مضاعفة الفترات الجزئية ينتج

$$I = T_{k+2,1} + \frac{1}{16}\beta_1 h_k^4 + \frac{1}{64}\beta_2 h_k^6 + \dots \qquad (45)$$

عندها نتمكن من حذف الحد الذي من الدرجة الرابعة بضرب (45) في 16 وطرح (44) منها فينتج

$$15\,I = 16\,T_{k+2,1} - T_{k+1,1} - \frac{3}{4}\beta_2 h_k^6 - \dots$$

أو

$$I = \frac{1}{15}\left(16T_{k+2,1} - T_{k+1,1}\right) - \frac{1}{20}\beta_2 h_k^6 - \dots \quad (46)$$

وهذا هو استكمال رومبرك الثاني ويرمز له $T_{k+2,2}$.

يمكن أن تستمر هذه العملية لعدة مراحل بحيث يتكون لدينا المثلث الآتي:

$$\begin{array}{cccccccc} T_{0,0} & \searrow & & & & & & \\ T_{1,0} & \searrow & T_{1,1} & \searrow & & & & \\ T_{2,0} & \searrow & T_{2,1} & \searrow & T_{2,2} & \searrow & & \\ T_{3,0} & \rightarrow & T_{3,1} & \rightarrow & T_{3,2} & \rightarrow & T_{3,3} \end{array}$$

شكل (7.7)

فتكون عملية تكوين الجدول بالصفوف، نجد $T_{0,0}$ كصف أول ثم $T_{1,0}$ ومنهما $T_{1,1}$ كصف ثاني. ومن $T_{1,0}$ و $T_{2,0}$ نجد $T_{2,1}$ وهذه مع $T_{1,1}$ تولد $T_{2,2}$ فنكون قد وجدنا الصف الثالث وهكذا.

العمل: لتكن لدينا الفترة [a, b] التي يراد إجراء التكامل فيها. في الخطوة الأولى نعتبر الفترة بأكملها هي فترة جزئية واحدة.

فنطبق صيغة شبه المنحرف عليها حيث $h_k = (b-a)/2^k$

وبوضع $k = 0$ يكون $h_0 = b - a$

إذن

$$T_{0,0} = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] \quad (47)$$

وبتنصيف h_0 ينتج

$$h_1 = \frac{1}{2}h_0 = \frac{b-a}{2}$$

فنجد T_{10}.

$$T_{1,0} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right) \left[f(a) + 2f(a+\frac{1}{2}(b-a)) + f(b)\right] \quad (48)$$

الآن نتمكن من تطبيق فكرة رومبرك على المعادلين (47) و (48) من خلال المعادلة (43) لينتج $T_{1,1}$ حيث

$$T_{1,1} = \frac{1}{3}(4T_{1,0} - T_{0,0}) \quad (49)$$

بعد حذف حدود الخطأ.

لاحظ أن $T_{1,0}$ يمكن وضعها بدلالة $T_{0,0}$.

$$T_{1,0} = \frac{1}{2}\left[T_{0,0} + + \frac{b-a}{2^0} f(a+\frac{1}{2}(b-a))\right] \quad (50)$$

بهذا يتكون الصف الأول والثاني من المثلث (7.7).

$$\begin{matrix} T_{0,0} & \searrow & \\ T_{1,0} & \rightarrow & T_{1,1} \end{matrix}$$

فإذا لم يكن $T_{1,1}$ يحقق الدقة المطلوبة نقوم بالخطوة الثانية وهي ننصف h_1 فنحصل على

$$h_2 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{b-a}{2^2}$$

ونستخرج $T_{2,0}$ حيث

$$T_{2,0} = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2^2}\right)\begin{bmatrix} f(a) + 2f(a+\frac{1}{2^2}(b-a)) + 2f(a+\frac{1}{2}(b-a)) \\ +2f(a+\frac{3}{2^2}(b-a)) + f(b) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[T_{1,0} + \frac{b-a}{2^1}\left(f(a+\frac{1}{4}(b-a)) + f(a+\frac{3}{4}(b-a))\right)\right] \quad (51)$$

وبملاحظة المعادلتين (50) و (51) يمكن الاستنتاج أن:

$$T_{i,0} = \frac{1}{2}[T_{i-1,0} + h_{i-1} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} f(a + (j-\frac{1}{2})h_{i-1})] \quad , \; i = 1 , \ldots , n \qquad (52)$$

بعد أن وجدنا $T_{2,0}$ وبتركيبها مع $T_{1,0}$ نستخرج قيمة جديدة للتكامل هي $T_{2,1}$، ذلك أن

$$T_{2,1} = \frac{1}{3}(4\,T_{2,0} - T_{1,0})$$

$$\begin{array}{l} T_{1,0} \searrow \\ T_{2,0} \longrightarrow T_{2,1} \end{array}$$

فتكون التركيبة المثلثية

$$\begin{array}{l} T_{0,0} \searrow \\ T_{1,0} \longrightarrow T_{1,1} \\ \quad\;\; \searrow \\ T_{2,0} \longrightarrow T_{2,1} \end{array}$$

إن إيجاد $T_{2,1}$ ليس هو الهدف حيث أنه سوف لن يكون أدق بكثير من $T_{1,1}$، وإنما الاثنين $T_{1,1}$ و $T_{2,1}$ يؤهلاننا الآن للقفز إلى مرحلة جديدة وهي إيجاد $T_{2,2}$ الناتجة عن تركيبهما كما ورد في المعادلة (46) فتكون

$$T_{2,2} = \frac{1}{15}(16\,T_{2,1} - T_{1,1})$$

والتي يرافقها خطأ من الرتبة h^6. وهكذا يكتمل، الصف الثالث من المثلث كما في الشكل (7.9).

$h_0 = \frac{b-a}{2^0}$

a b

$h_2 = \frac{1}{2}h_0 = \frac{b-a}{2^1}$ $\quad a + \frac{b-a}{2^1}$

a b

$h_1 = \frac{1}{2}h_1 = \frac{b-a}{2^2}$

a b

$a + 1\left(\frac{b-a}{2^2}\right) \quad a + 2\left(\frac{b-a}{2^2}\right) \quad a + 3\left(\frac{b-a}{2^2}\right)$

$h_3 = \frac{1}{2}h_2 = \frac{b-a}{2^3}$

a b

$a + 2\left(\frac{b-a}{2^3}\right) \quad a + 4\left(\frac{b-a}{2^3}\right) \quad a + 7\left(\frac{b-a}{2^3}\right)$

$h_4 = \frac{1}{2}h_3 = \frac{b-a}{2^4}$

a b

$a + \left(\frac{b-a}{2^4}\right) \quad a + 8\left(\frac{b-a}{2^4}\right) \quad a + 13\left(\frac{b-a}{2^4}\right)$

شكل (7.8)

تمارين

1. أوجد $\int_{0}^{2} f(x)dx$ حيث

x	0	0.12	0.53	0.87	1.08	1.43	2.00
F (x)	1.0000	0.8869	0.5886	0.4190	0.3369	0.2393	0.1353

2. لديك الجدول

x	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8
f (x)	1.543	1.668	1.811	1.971	2.151	2.352	2.577	2.828	3.107

جد $\int_{1.0}^{1.8} f(x)dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف معتبراً

أ- $h = 0.1$ ب- $h = 0.2$ حـ- $h = 0.4$

3. إذا كان الجدول في السؤال (2) يمثل cosh (x)، ما هو مقدار الخطأ الحاصل في حساب التكامل في الحالات أ، ب، حـ؟ وكم هو قريب بالنسبة إلى h2 ؟ ما هي الأخطاء الأخرى إلى جانب ما جاء في الصغة (17) من الفصل السابع.

4. كون جدولاً للدالة ex بدءاً من $x = 1.8$ حتى $x = 3.4$ حيث $h = 0.2$ وذلك لثلاث مراتب عشرية. ثم احسب $\int_{1.8}^{3.4} e^{x}dx$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف متخذاً $h = 0.2$. ما مقدار الخطأ في النتيجة المحسوبة؟ تحقق من أن مقدار الخطأ يقع ضمن الحدود التي تضعها الصيغة (17). بفرض أنك لا تعرف الدالة، استخدم الفروق الثانية في الجدول المعمول لتخمين الخطأ. كم يجب أن يكون طول h لتحصل على تكامل بخطأ أقل من 0.000005 باستخدام قاعدة شبه المنحرف؟

5. استخدم صيغ نيوتن كوتس المغلقة والمفتوحة حيث n = 0,1,2,3 لتقريب.

$$b)\int_0^1 e^{x^2}dx \quad , \quad a)\int_0^{\pi/6} e^{-x}\sin x\,dx$$

6. اوجد عدد الفترات الجزئية اللازمة لتقدير $\int_{\alpha}^{1} x^{-1/2}\,dx$ صحيحاً لاربعة مراتب عشرية. مستخدماً قاعدة سمسن ذلك إذا كانت:

1) $\alpha = 0.1$ 2) $\alpha = 0.01$ 3) $\alpha = 0.001$ 4) $\alpha = 0$

7. استخدم تكامل رمبرك لحساب T_{22} للتكاملات الآتية:

أ) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ ب) $\int_0^2 x^3 dx$ جـ) $\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx$

د) $\int_0^1 \sin \pi x\,dx$ هـ) $\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx$ و) $\int_0^1 x^2 e^x dx$

8. استخدم تكامل رمبرك لحساب T_{33} للتكاملات الآتية:

أ) $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$ ب) $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \cos x\,dx$

9. استخدم تكامل رمبرك لتقريب $\int_0^2 x^2 e^{-x^2}dx$ حتى يكون $T_{n,n-1}$ و T_{nn} متطابقة لحد 10^{-6}.

10. استخدم تكامل رمبرك لتقريب $\int_1^3 e^x \sin x\,dx$ اكمل الجدول حتى يكون $T_{n,n-1}$ و T_{nn} متطابقة لحد 10^{-6}. قارن الناتج مع القيمة الحقيقية.

المصطلحات

(أ)

(ب)

(ت)



المراجع

- سعد المريمي (1993)، مبادئ التحليل العددي، الدار العربية للنشر.
- علي محمد إبراهيم ومحمد ماهر علي النجار (1992)، التحليل العددي، منشورات دار الفاتح، (مترجم).
- علي محمد صادق سيفي وابتسام كمال الدين (1986)، مبادئ التحليل العددي ، جامعة بغداد.

- Ahlberg, J.H., E.N. Nilson, and J.L. Walsh (1967); The Theory of Splines and their Applications, Academic Press, New York.
- Atkinson, K.E. (1989); An Intoduction to Numerical Analysis, John Wiley & Sons, Inc .
- Bittinger, M.L., and Beecher, J.A., (2006) ; Introductory and Intermediate Algebra, 3rd addition, Addison Wesley.
- Burden, R.L. and J.D. Faires (1985); Numerical Analysis, Prindle, Weber & Schmidt.
- Gerald, C.F. (1978); Applied Numerical Analysis, Addison Wesley .
- Kadhum, N.I. Ph.D. (1988); The Spline Approach to the Numerical Solution of Parabolic Partial Differential Equations .
- Kolman, B. (1982); Elementary Linear Algebra, Macmillan Publishing Co., Inc.
- Sauer, T. (2006); Numerical Analysis, Addison Wesley.
- Shanker Rao, G. (2007); mathematical methods, I.K, International Publishing House Pvt. Ltd.
- Smith, G.D. (1965); Numerical Solution of Partial Differeatial Equations, Oxford, London .

- Swokowski, E.W. (1991); Calculus, Prindle, Weber & Schmidt .
- Taylor, A.E. and W.R. Mann, (1972); Advanced Calculus, John wiley & Sons, Inc .
- Vedamurthy, V.N., and Iyengar, N.Ch.S.N. (2006); Numerical Methods, VIKAS Publishing House PVT LTS.

التحليل العددي
Numerical Analysis